

МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ЗАБРУДНЕННЯ ТА САМООЧИЩЕННЯ ВОДНОГО СЕРЕДОВИЩА

В.Д.Погребенник, М.М.Мельник,
О.О.Червінка

Фізико-механічний інститут
ім.Г.В.Карпенка НАН України
79601, м. Львів, вул. Наукова, 5
E-mail: dep26@ah.ipm.lviv.ua

Запропоновано модель середовища, яка містить приводний шар атмосфери, шарувате водне середовище та донні відклади. Проаналізовано математичні моделі процесів забруднення та самоочищення водного середовища і рекомендовано використати для водного середовища модель Беляєва-Кондуфорової, а для донних відкладів – модель В. Лаврика. Ці моделі служать підґрунттям для вибору інтегральних параметрів водного середовища.

Основним результатом вивчення навколошнього середовища повинно бути створення математичної моделі, яка дасть змогу не тільки оцінювати параметри гідросфери, але й прогнозувати їх зміни і визначати оптимальні режими або комплекси охоронних заходів.

При цьому будемо притримуватися загальноприйнятого підходу, при якому процес наукового пізнання це послідовність або ієрархія моделей.

На основі аналізу принципів побудови моделей навколошнього середовища визначимо вимоги до вихідної інформації систем моніторингу параметрів водного середовища, після чого можна буде визначити циркуляцію потоків та етапи опрацювання інформації.

Глобальний цикл хімічних елементів біосфери представляє складну систему, яка складається з декількох таких же складних підсистем.

У загальному випадку для кожної з підсистем можна скласти рівняння балансу по кожній хімічній речовині та енергії у вигляді [1, 2]

$$dE/dt = f_1(E, X, Y, t) - f_2(E, X, Y, t); \quad X = f_3(E, t), \quad (1)$$

де $E = \{e_1, \dots, e_b, \dots, e_k\}$ – вектор, що характеризує запас речовин і енергії (e_i – запас i -ї речовини);

$X = \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ – вектор станів підсистеми (x_j – значення j -го параметра підсистеми);

$Y = \{y_1, \dots, y_l, \dots, y_m\}$ – вектор станів зовнішнього середовища (y_l – значення l -го параметра сусідніх підсистем);

t – час;

f_1 – функціонал потоку речовини (енергії) в підсистему;

f_2 – функціонал потоку речовини (енергії) з підсистеми (витрати);

f_3 – функціонал стану підсистеми;

k – кількість речовин, що беруть участь в обмінному циклі підсистеми;

n – кількість параметрів, що характеризують підсистему;

m – кількість параметрів, що характеризують сусідні підсистеми.

Для отримання математичної моделі в цілому рівняння (1) для кожного блоку треба об'єднати в спільну систему. Для врахування просторової мінливості параметрів звичайно розбивають підсистему на дві частини за осями координат. Серед складових векторів X , Y будуть параметри координат, а функціонали f_1 , f_2 повинні враховувати процес обміну між окремими частинами моделюваного середовища. У цьому випадку розмірність системи (1) буде надзвичайно велика і практична її реалізація на ЕОМ, тобто розв'язок задачі моделювання біосфери в повному обсязі зі ступенем деталізації, який задовільняє всі можливі області застосування моделі, зараз і в найближчому майбутньому нездійсненні. Тому проводять багаторазову декомпозицію моделі біосфери, тобто розбивання її на окремі блоки (підмоделі). Очевидно в подальшому можна буде вести мову про створення моделі біосфери.

Екосистему регіону як об'єкт регионального моніторингу, доцільно представити територією водозбірного басейну, оскільки вона зручна для цілісного функціонального дослідження і регулювання зі стороною людини. Як об'єкт моніторингу водозбірний басейн має низку переваг перед іншими територіальними одиницями: визначення кордонів, аналогічна будова басейнів всіх масштабів, односпрямованість потоків речовини і енергії.

Розглянуті моделі практично не агреговані і представляють собою найпростіші моделі із зосередженими параметрами.

Для побудови складніших моделей пропонується підхід, суть якого полягає в побудові ієрархії математичних моделей. На певних рівнях кожної моделі виходячи із загальних уявлень про структуру біосфери і процесах, які в ній відбуваються, здійснюється вимірювання і корекція імітаційної системи. Причому побудова імітаційної системи із готових моделей і її надбудова в залежності від цілей дослідження здійснюється безпосередньо при самому дослідженні.

Математичний апарат, використаний у всіх проаналізованих вище моделях, оснований на розв'язку диференційних рівнянь. У цих моделях вважалось, що складові векторів X , Y , E у виразі (1) є детермінованими величинами. Звичайно, насправді це не так. Однак, як відзначається в роботі [3], враховувати випадковий характер, тобто створювати стохастичну модель, є зміст тільки в цьому випадку, коли аналізується питання про збереження рідкого виду в суспільстві або рідкого гена в популяції, оскільки як було показано ще Леслі [4], при численній популяції в 300 особин розходження в передбаченні поведінки складає всього 2%.

Іншим напрямом є стохастичні моделі, в яких, як вже говорилося раніше, компоненти векторів параметрів представлені випадковими процесами. При деяких припущеннях відносно характеру випадковості і виду функцій f розв'язок (1) буде також випадковим процесом, всеосяжна характеристика якого буде міститися тільки у відповідному наборі функцій розподілу. У загальному вигляді розв'язок цієї задачі пов'язаний з непереборними труднощами, однак для випадкових збурень без наслідку (марківських) і особливо для неперевірних процесів дифузійного типу вдається отримати цікаві результати. Очевидно, що в цьому випадку параметри, необхідні для побудови моделі, повинні бути представлени у вигляді параметрів законів розподілу випадкових величин.

Для детермінованих моделей із зосередженими параметрами, так як і для моделей вищих рівнів, параметри оточуючого середовища, і зокрема, забруднення, повинні задаватися у вигляді усереднених концентрацій або часових рядів. Часові інтервали усереднення можуть бути найрізноманітнішими – від години до місяця.

Набір речовин, кругообіг яких враховується в екологічних моделях всіх рівнів, надзвичайно малий. У всіх проаналізованих моделях природних систем розглядаються в основному кисень, вуглець, азот і фосфор. Часом використовують сумарний показник мінерального харчування.

Дещо інша ситуація складається при моделюванні переносу речовин у водоймах. Тут розроблено цілий спектр моделей поширення домішок практично для будь-якої речовини. Однак через недостатність вихідної інформації, з одного боку, і відсутності обліку впливу мікроелементів в екологічних моделях, з другого, моделі ці використовуються тільки для сильних отруювальних і радіоактивних речовин.

Аналогічний стан і для моделей рік. Правда, в моделі р. Трент [5] враховувались 16 гідрохімічних показників: хлор, загальне число розчинених твердих речовин, pH, завислі частинки, амонійний і окислений азот, біохімічне споживання кисню, загальний органічний вуглець, моногідрофеноли і метали Zn, Cr, Ni, Pb, Cd. Однак модель рибних запасів враховувала тільки сумарну кількість цих речовин, у зв'язку з чим вихідними значеннями моделі були тільки 5 градацій від "риби немає" до "риби багато".

Моделі водних об'єктів, як вже відзначалося раніше, є важливою частиною абіотичної складової біогеоценозу.

З точки зору декомпозиції наведені вище приклади показують, що просторово-складні водні системи розбиваються за територіальною ознакою [6–9], а їх підмоделі або моделі таких достатньо однорідних об'єктів складаються з підмоделей окремих процесів.

Зауважимо, що будь-який із параметрів водного об'єкту може стати об'єктом моделювання. Основним фактором формування полів концентрації домішок у водоймах є крім хіміко-біологічних процесів у взаємодії з гідробіонтами фізичні процеси: течія і турбулентна дифузія. Останні – це складні процеси, моделюванню яких присв'ячено велику кількість робіт. Параметрами цих моделей є поздовжній і поперечний профілі річних долин, які також моделюються [10], і так до безмежності.

Математичний апарат, що застосовується в моделях цього рівня, відрізняється великою різноманітністю. Тут використо-

вуються детерміністичні і стохастичні моделі, моделі із зосередженими параметрами і просторові, а кожен із цих класів ділиться на окремі типи. Очевидно, що для кожного із них потрібен свій тип вхідних даних, описання функцій розподілу випадкових (зокрема марковських) процесів для стохастичних моделей, усереднені значення параметрів або їх часові ряди для детерміністичних моделей, описання полів параметрів для просторових моделей. У свою чергу часові ряди, наприклад, можуть відрізнятися з точки зору довжини запису і частоти збору проб в залежності від цілей моделювання. Так, для моделей водних об'єктів, які використовуються для оцінки ефективності капіталовкладень, потрібні ряди значень параметрів, отриманих з періодом збору біля місяця, а також їх середньорічні значення. Моделі, які застосовуються при проектуванні конкретних гідроспоруд або систем водопостачання, потребують більшої деталізації і у випадку використання часових рядів необхідні вимірювання з частотою один раз на добу, і, нарешті, моделі, які розробляються з метою досягнення ефективного керування якістю води, повинні відображати всі, в тому числі і наймобільніші процеси.

Оскільки інформаційно-вимірювальна система моніторингу ПВС повинна задовільнити всі поставлені вимоги, вихід може бути тільки в ієрархічній організації отримуваної інформації, тобто в побудові ієрархічної структури моделей водного об'єкту, яка, взаємодіючи з ієрархією екологічних моделей, забезпечує ієрархічний апарат прийняття рішень, який функціонує у відповідності з ієрархією цілей.

Розглянемо модель водного середовища та донних відкладів.

Така модель (рис. 1.) включає: приводний шар атмосфери, шарувате водне середовище з кількістю шарів m та донні відклади, які мають n шарів.

Водне середовище характеризується концентрацією речовин S , швидкістю руху v_p , наявністю дрібномасштабних вихорів, тангенціальна швидкість яких $V_\phi(r)$ - записано виразом (2), а вихровий компонент швидкості потоку \overrightarrow{rotv} - виразом (3):

$$V_\phi(r) = a \frac{r}{R_B} \exp\left(-\frac{r}{R_B}\right). \quad (2)$$

$$\overrightarrow{rotv} = \oint_L v_\phi dL. \quad (3)$$

де a – коефіцієнт пропорційності;

r – віддаль;

R_B – радіус вихора;

L – контур інтегрування.

У водному середовищі міститься підводний пристрій ПП, з'єднаний з бортовим пристроєм БП та електронно-обчислювальною машиною ЕОМ лінією зв'язку ЛЗ.

Форма забруднень водного середовища визначається видом антропогенного впливу. Це скинення промислових, господарсько-побутових стічних вод, ґрунтів, радіоактивних відходів, від судноплавства, електростанцій, зрошувальних систем і стоки з сільськогосподарських угідь, також фізичні впливи на прибережні райони (геологорозвідка, видобуток корисних копалин, у тому числі нафти і газу, на шельфі) [7].

Трансформацію забруднень, що надходять у водне середовище різними шляхами, подано у вигляді схеми [7], де показано шляхи міграції, розведення і концентрування забруднень.

Серед вимірюваних параметрів у водному середовищі можна виділити такі: 1) параметри, які характеризують стан середовища у результаті впливу забруднювачів; 2) параметри, які характеризують забруднювачі; 3) параметри, які характеризують взаємодію середовища із забруднювачами, а також взаємодію між різними видами забруднювачів. Всередині кожної із названих груп можна виділити параметри фізичної, хімічної і біологічної природи.

Розглянемо окремо кожну з названих груп вимірюваних параметрів. До першої групи слід включити такі параметри: фізичні – солоність, прозорість, густина, швидкість дифузії; хімічні – концентрація водневих іонів, кількість розчиненого кисню, вміст вуглецю, нітратів, нітритів, фосфатів; біологічні – вміст хлорофілу, АТФ. До другої групи – параметри: фізичні – температура (при теплових забрудненнях), швидкість осідання твердих часток; хімічні – вміст металів (Cu, Pb, Hg, Zn, Fe, Ni, Cd та ін.), нафтопродуктів, хлорорганічних сполук, пестицидів, СПАР, редокс-сполук, мікрофлора. До третьої групи – параметри: фізичні – колір, запас, прозорість; хімічні – БПК,

ХПК, продукти гідролізу пестицидів, продукти реакцій комплексоутворення між металами та органічними забруднювачами, аналіз поверхневої плівки, перманганатна окислюваність; біологічні – вміст металів у біоті, хлорорганічних сполук, зміна структури екосистеми, її трофічних ланок.

Просторово-часові зміни вмісту хімічних елементів C у воді в об'ємі V можна описати таким виразом

$$\frac{dC(V)}{dt} = \frac{dC_H(V)}{dt} + \frac{dC_A(V)}{dt} + \frac{dC_{Ch}(V)}{dt} + \frac{dC_B(V)}{dt} + \frac{dC_S(V)}{dt}. \quad (4)$$

Смисл всіх членів, що входять у це рівняння, пояснюється у табл. 1.

З точки зору екології кисень у порівнянні з іншими газами відіграє найважливішу роль, оскільки він впливає не тільки на хімічні процеси, але й на живі організми. У моделях Стрітера-Феллса [2], що описують дефіцит розчиненого кисню у водоймах, чинники, що його характеризують, зводяться до обміну з атмосферою і зниженню біологічної активності.

В'язкість води η описується рівнянням Пуазейля

$$\eta = 0,178 / (1 + 0,0337T + 0,00022T^2), \quad (5)$$

де T – температура.

Залежність густини ρ_w від температури T можна апроксимувати рівнянням

$$\rho_w = a + bT + cT^2 + dT^3, \quad (6)$$

де $a=0,9998785$, $b=6,026016810^{-5}$, $c=7,994702710^{-6}$, $d=4,36925710^{-8}$ або простішою апроксимацією з використанням степеневої функції Маркофські і Харлемана

$$\rho_w = 1 - 6,63 \cdot 10^{-6}(T-4)^2. \quad (7)$$

Залежність густини від глибини H отримано щляхом регресії

$$\rho_w = \rho_0 + 4,63 \cdot 10^{-6}H. \quad (8)$$

Моделі обміну між донними відкладами і водою наведено у [18] та показано процеси, що впливають на динаміку фосфору у діяльному верхньому і глибших шарах, а також в проміжних і придонних водах.

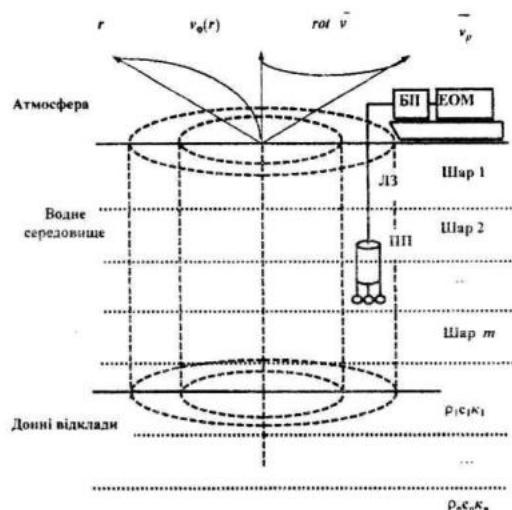


Рис. 1. Модель водного середовища.

Баланс хімічних речовин у воді

Позначення	Процес
$\frac{dC_H(V)}{dt}$	Гідрологічні та гідродинамічні процеси, пов'язані з надходженням і винесенням речовин: адвекція – притік і відтік ґрунтових вод; притік і відтік наземних вод; конвекція – обмін з іншими частинами потоків у водоймі; дифузія, турбулентність.
$\frac{dC_A(V)}{dt}$	Обмінні процеси у прикордонному шарі вода-повітря: зростання ролі дифузійних процесів обміну в результаті хімічних реакцій; ефект пухирців-брізок.
$\frac{dC_{Ch}(V)}{dt}$	Хімічна кінетика: конденсація; хімічні реакції; атмосферні опади.
$\frac{dC_B(V)}{dt}$	Біологічна кінетика: поглинання, виділення; автоліз
$\frac{dC_S(V)}{dt}$	Обмінні процеси в системі вода-донні відклади: дифузія; адсорбція; хемосорбція; десорбція; вивільнення.

На сьогодні в Україні та за кордоном вже розроблено багато математичних моделей, які описують динаміку водного середовища [11–18].

Проаналізуємо найпоширеніші як в Україні, так і за її межами математичні моделі, що описують зміну значень хімічних показників якості водного середовища. Для простоти обмежимося моделюванням водного середовища за умови, що розподіл значень показників якості води в глибину та в ширину є відносно однорідним і в першому наближенні може повністю характеризуватися значенням показників в одній усередненій точці поперечного перерізу. Отже, у цьому випадку, процес моделювання можна виконувати не по трьох просторових координатах, а лише по одній вертикальній осі z .

Більшість відомих моделей за кількістю та характером процесів, які враховуються, можна розбити на кілька типів:

- 1) моделі, що враховують лише процеси розбавлення вод;
- 2) моделі, що враховують процеси самоочищення вод, але без урахування процесів розбавлення;
- 3) моделі розбавлення з урахуванням процесів самоочищення.

Серед моделей першого типу найпоширенішою є модель В.А.Фролова–І.Д.Родзиллера [10] для консервативних речовин, тобто речовин, які не вступають в хімічні реакції

$$\frac{dC(t)}{dt} = -F_1(t)[C(t) - C_{\text{sep}}(t)]; \quad C(0) = C_0, \quad (9)$$

де $C(t)$ – значення концентрації речовин у воді;

t – час;

C_{sep} – середнє значення $C(t)$ у створі повного змішування;

$F_1(t)$ – деяка нелінійна функція, вираз якої виведено В.А.Фроловим на основі аналізу розмірностей – характеризує зменшення концентрації за рахунок процесів розбавлення.

Ця модель описує зміни значення концентрації у часі, але на практиці її використовують для опису її зміни у просторі – вздовж осі z .

Інший підхід використовується у моделях, які ґрунтуються на диференційному рівнянні другого порядку в

частинних похідних, в якому зміна значення $C(t)$ моделюється як в часі, так і в просторі. Прикладами таких моделей є моделі В.М.Маккавеєва, А.В.Карнаушева, А.М.Айтсама, Х.А.Вельнера, Л.Л.Паалю, М.А.Бесценної, М.А.Руффель та інших [10].

Головним недоліком моделей первого типу є те, що вони можуть застосовуватися для опису динаміки концентрацій лише консервативних хімічних речовин, враховуючи тільки один фізичний фактор – розбавлення (поширення та перемішування). Крім цього, основним недоліком моделі (9) є невідповідність динаміки реальних процесів розбавлення експоненціальному закону.

Серед моделей другого типу – моделей самоочищення води, в яких не враховуються процеси розбавлення, найпоширенішими є моделі у вигляді диференційного рівняння первого порядку. Загалом, можна виділити такі види моделей:

1. Прості лінійні моделі, основані на диференційному рівнянні первого порядку

$$\frac{dC(t)}{dt} = -K_p C(t); \quad C(0) = C_0, \quad (10)$$

де K_p – коефіцієнт розпаду забруднювальної речовини за одиницю часу, так звана константа розпаду первого порядку ($1/c$);

C_0 – значення концентрації в початковий момент часу $t=0$.

2. Нелінійна модель Моно самоочищення води [10]

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\psi_{\max} C}{V_1 + C}; \quad C(0) = C_0, \quad (11)$$

де C – концентрація у воді деякої хімічної речовини;

ψ_{\max} – максимальна швидкість розкладу забруднювальної речовини;

V_1 – константа напівнасичення для забруднювальних речовин.

Моделі (10) і (11) враховують нелінійність динаміки водних процесів за гранично низьких чи високих значень концентрації.

3. Балансові моделі. Прикладом балансових моделей є моделі зміни концентрації зміни концентрації розчинен-

ного у воді кисню, зокрема модель Стритера-Феллса [2, 17]

$$\frac{dC_0}{dt} = a_1(C_{on} - C_0) - a_2 C_{BSK}, \quad (12)$$

де C – концентрації розчиненого у воді кисню;

C_{on} – концентрація насыщення для кисню у воді;

C_{BSK} – концентрація легкоокислювальних органічних речовин (біохімічне споживання кисню);

a_1 – стала швидкості реаерації для розчиненого у воді кисню;

a_2 – константа розпаду першого порядку для легкоокислювальних органічних речовин.

Рівняння (12) є стаціонарним розв'язком диференційного рівняння першого порядку у частинних похідних.

$$L_i = -\left(V_1 \frac{\partial}{\partial x} + V_2 \frac{\partial}{\partial y} + V_3 [f(\vec{rot} \vec{v})] \frac{\partial}{\partial z} \right) + A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + A_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (14)$$

де

$L_i(t)$ – оператор перенесення завислих і розчинених речовин течіями та турбулентністю;

V_1, V_2, V_3 – складові швидкості течій по осіах x, y, z , причому у складову швидкості V_3 входить проекція вихору швидкості течії на вертикальну вісь;

A_1, A_2, A_3 – коефіцієнти турбулентної дифузії;

F_i – сумарні джерела, що характеризують виникнення та зникнення i -ї компоненти всередині системи.

При вивченні гідрохімічного режиму водойм великий інтерес становить визначення концентрації речовин у донних відкладах. Розроблено модель В.І.Лаврика накопичення забруднень у донних відкладах [14–16]

$$\frac{dC_{ij}^d}{dt} = \alpha_{ij} h_{cep} C_{ij} - C_{ij}^d (\beta_{ij} + \lambda_j), \quad (15)$$

де α_{ij} – константа швидкості седиментації;

h_{cep} – середня глибина водойми;

C_{ij} – концентрація речовин;

C_{ij}^d – концентрація речовин у донних відкладах;

Як видно з (12), в активі балансу моделі Стритера-Феллса знаходяться процеси надходження кисню з атмосфери з реаерацією, а в пасиві – процеси використання розчиненого у воді кисню в біохімічних реакціях розкладу та розпаду легкоокислювальних речовин.

Основним недоліком моделей другого типу є неврахування процесів розбавлення.

Моделями третього типу, які враховують всі процеси самоочищення разом із розбавленням, є моделі першого типу, доповнені моделями другого типу. Прикладом таких моделей є модель Бєляєва-Кондуфорової [11]

$$\frac{dC_i}{dt} = L_i C_i + F_i, \quad (13)$$

β_{ij} – константа інтенсивності змучування; λ_{ij} – константа хімічного, біологічного або радіоактивного розпаду.

Після побудови концептуальних математичних моделей окремих гідрохімічних, гідрофізичних та гідробіологічних процесів, що відбуваються у водоймах, для зручності та ефективного використання побудовано узагальнену математичну модель, що описує кожний з цих процесів. Таку універсальну модель запропонував В.І.Лаврик, вона становить систему звичайних диференційних рівнянь з невідомими гідроекологічними показниками такого вигляду [270]

$$\frac{dC_1}{dt} = a_{11} f_{11} C_1 + a_{12} f_{12} C_2 + \dots + a_{1n} f_{1n} C_n, \quad (16)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = a_{21} f_{21} C_1 + a_{22} f_{22} C_2 + \dots + a_{2n} f_{2n} C_n,$$

$$\frac{dC_n}{dt} = a_{n1} f_{n1} C_1 + a_{n2} f_{n2} C_2 + \dots + a_{nn} f_{nn} C_n,$$

де C_1, \dots, C_i – числові значення концентрацій;

f_{11}, \dots, f_{1n} – трофічні та кінетичні функції, що описують інтенсивність взаємодії між окремими показниками (концентраціями);

a_{11}, \dots, a_{nn} – постійні величини, що є параметрами ідентифікації універсальної математичної моделі, які можуть набувати значення, рівні нулю або одиниці, у залежності від необхідності опису того або іншого процесу;

$a_{11}f_{11}C_1$ – члени правих частин рівняння, що описують певні гідрофізичні, гідрохімічні та гідробіологічні процеси, явища, взаємодії, що відбуваються всередині і зовні водойми і які суттєво впливають на динаміку тих або інших показників, з допомогою яких визначається і прогнозується стан водних екосистем.

На жаль, ця модель страждає надмірною узагальненістю та невизначеністю, крім того, до цього недоліку додається громіздкість опису.

Виходячи з аналізу моделей Беляєва-Кондуфорової та Лаврика обґрунтовано вибір інтегральних параметрів водного середовища та донних відкладів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алексеев В.В., Крышев И.И., Сазыкина Т.С. Физическое и математическое моделирование экосистем. – Санкт-Петербург, 1992. – 337 с.

2. Страшкраба М., Гнаук А. Пресноводные экосистемы. Математическое моделирование. – М.: Мир, 1989. – 376 с.

3. Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. Динамические модели экологических систем. – Л.: Гидрометеоиздат. – 1980. – 288 с.

4. Leslie P.H. A stochastic model for studying the methods // Biometrika. – V. 45. – 1958. – P. 16–31.

5. Уорн А.Э. Математическая модель реки Трент // Математические модели контроля загрязнения воды. Под ред. А. Джеймса. – М.: Мир. – 1981. – С. 401–424.

6. Джемисон Д.Г. Иерархический подход к моделированию управления качеством воды. – М.: Мир. – 1981. – С. 425–428.

7. Моделирование геохимических процессов в морском прибрежном экотоне / В.И. Беляев, Е.Е. Совга, М.Ю. Худошина и др. – К.: Наукова думка, 1993. – 239 с.

8. Моделирование и контроль качества вод : Сб. науч. тр. / ВНИИВО. – Харьков, 1988. – 202 с.

9. Моделирование процессов в природно-экономических системах. – Новосибирск: Наука, 1982. – 177 с.

10. Мокін В.Б., Мокін Б.І. Математичні моделі та програми для оцінювання якості річкових вод. – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2000. – 152 с.

11. Беляев В.И., Кондуфорова Н.В., Тимченко И.Е. Математическое моделирование экологических систем шельфа. – К.: Наук. думка, 1990. – 240 с.

12. Біляєв М.М. Математичне моделювання поширення забруднюючих речовин у водному та повітряному середовищах: Автореф. дис...д-ра техн. наук: 05.13.02 / Київський ун-т. – К.; 1996. – 41с.

13. Лаврик В.И. Информационно-экспертная система оценки и прогнозирования качества природных вод и состояния пресноводных экосистем // Гидробиологический журнал. – 1998. – Т. 32, №2. – С. 105–112.

14. Лаврик В.И. Основы математического моделирования процессов физико-химического и биологического самоочищения водных экосистем // Гидробиологический журнал. – 1999. – Т. 35, №3. – С. 15–39.

15. Лаврик В.И., Никифорович Н.А. Математическое моделирование в гидроэкологических исследованиях. – Киев: Фитосоциоцентр, 1998. – 288 с.

16. Лаврик В.И. Методи математично-го моделювання в екології. – Київ: Фітосоціоцентр, 1998. – 132 с.

17. Тадеуш Кватер, Здіслав Кендзьора. Аналіз стану забруднення ріки на основі критерію вмісту кисню // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2001. – Вип. 58. – С. 151–153.

18. Вершинин А.В., Горницкий А.Б., Егоров А.В., Розанов А.Г. Методика изучения химического обмена через границу вода-осадок в открытой системе морского дна // Океанология. – 1994. – Т. 34. – №1. – С. 139–145.