О ПЕРЕНОСЕ РАДИОНУКЛИДОВ В МНОГОСЛОЙНЫХ ДОННЫХ ОСАДКАХ

П.М. Колесников[1], Г.Ф. Батраков[2]

[1] Научно-исследовательский центр «Энергоинформ»
Белоруссия, г. Минск

[2]Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Приводятся аналитические решения уравнения переноса радионуклидов в двухслойных и многослойных средах при различных начальных и граничных условиях.

Введение. Характерной особенностью донных осадков является их вертикальная неоднородность, которая обусловлена разнообразием состава осаждающихся взвешенных частиц. Состав взвешенных частиц определяется рядом факторов. Одной из особенностей таких частиц является их способность сорбировать и десорбировать находящиеся в морской воде радиоактивные изотопы. Исследования концентрации ^{137}Cs в донных осадках Черного моря [1, 2] показали, что вертикальное распределение в ряде случаев носит слоистый характер. Слои с повышенной и пониженной концентрацией отражают изменчивость концентрации ^{137}Cs в водах Черного моря. Таким образом, вертикальная структура концентрации радиоизотопов позволяет производить оценку эволюции физико-химической и физико-географической обстановки в данном регионе. Для достоверности такой оценки необходимо иметь данные о диффузии различных примесей в донных осадках. Такие данные проще всего в настоящее время получить на основе математического моделирования.

Постановка задачи. Рассмотрим перенос радионуклидов в многослойных осадках, состоящих из i слоев, имеющих переносные характеристики λ_i, κ_i, источники J_{ij}. Для общности будем изучать многослойные среды в виде плоских $m = 0$, цилиндрических $m = 1$ и сферических $m = 2$ слоев.

Уравнение диффузии для этих случаев записывается в виде

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \lambda_i c_i = \kappa_i \frac{1}{z^m}\frac{\partial}{\partial z} z^m \frac{\partial c_i}{\partial z} + J_{ij}(z,t), \quad (1)$$

при следующих начальных условиях:

$$c_i(z,0) = c_{i0}, \quad (2)$$

граничные условия на внешних границах возьмем классические 1–3 родов

$$-\kappa_i \frac{\partial c_i}{\partial z} + \alpha_i c_i = \Phi_i(t),$$

$$\kappa_n \frac{\partial c_n}{\partial z} + \alpha_n c_n = \Phi_n(t), \quad (3)$$

$$c_i = c_{i+1},$$

а на внутренних границах – условия 4 рода (сопряженные)

$$\kappa_i \frac{\partial c_i}{\partial z} = \kappa_{i+1} \frac{\partial c_i}{\partial z}. \quad (4)$$

Общее решение. Уравнения (1–4) будем решать методами интегральных преобразований.

Для определения собственных функций и собственных значений имеем уравнения

$$\frac{1}{z^m}\frac{d}{dz} z^m \frac{d\Psi_{in}}{dz} + \mu_{in}^2 \Psi_{in} = 0 \quad (5)$$

и граничные условия

$$-\kappa_i \frac{d\Psi_{in}}{dz} + \alpha_i \Psi_{in} = 0,$$

$$\Psi_{in} = \Psi_{i+1,n}, \quad \kappa_i \frac{d\Psi_{in}}{dz} = \kappa_{i+1}\frac{d\Psi_{i+1,n}}{dz}, \quad (6)$$

$$\kappa_n \frac{d\Psi_{in}}{dz} + \alpha_n \Psi_{in} = 0.$$

Собственными функциями (5)–(6) будут

$$\Psi_{in}(z) = A_{in}\Phi_{in}(z) + B_{in}\theta_{in}(z),$$

где A_{in}, B_{in} – постоянные интегрирования, $\Phi_{in}(z), \theta_{in}(z)$ – два линейно независимых решения уравнения (5), которые выражаются для плоских слоев ($m = 0$) в виде

$$\Phi_{in} = \sin\mu_n z, \quad \theta_{in} = \cos\mu_n z,$$

цилиндрических слоев ($m = 1$)

$$\Phi_{in} = J_0(\mu_n z), \quad \theta_{in} = Y_0(\mu_n z),$$

и сферических слоев ($m = 2$)

$$\Phi_{in} = \frac{1}{z}\sin\mu_n z, \quad \theta_{in} = \frac{1}{z}\cos\mu_n z,$$

где $J_0(\mu_n z), Y_0(\mu_n z)$ – функции Бесселя нулевого порядка действительного аргумента первого и второго рода соответственно.

Собственные функции удовлетворяют условию ортогональности

$$\int \Psi_{in}\Psi_{ir} z^m dz = \begin{cases} 0 & n \neq r \\ N_n & n = r \end{cases},$$

откуда определяется норма

$$N_n = \int z^m \Psi_{in}^2 dz .$$

Интегральное преобразование имеет вид

$$\bar{c}_{in} = \frac{1}{N}\int z^m \Psi_{in} c_i dz ,$$

а решение находится в виде разложения по собственным функциям

$$\bar{c}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \exp(-\mu_n k_i t)\Psi_{in}(z) .$$

Умножим уравнение (1) и начальное условие (2) на Ψ_{in} и проинтегрируем по координате z, в результате получим для $\bar{c}_i$ уравнение первого порядка с заданным начальным условием

$$\frac{d\bar{c}_{ni}}{dt} + \lambda_i c_{ni} + \mu_n^2 \bar{c}_{ni}\kappa_i =$$

$$= \bar{J}_{ij} + \left\{ \kappa_1 \left| z^m \frac{d\Psi_{1n}}{dz} \right| \Phi_1(t) + \right.$$

$$\left. + \kappa_2 \left| z^m \frac{d\Psi_{n+1,n}}{dz} \right| \Phi_n(t) \right\},$$

$$\bar{c}_n = c_{i0}, \quad \bar{J}_{ij} = \int z^m \Psi_{in} J_{ij} dz,$$

решение которого находим методом вариации произвольной постоянной

$$\bar{c}_{ni} = e^{-(\lambda_i + \mu_n^2 \kappa)t} \cdot$$

$$\cdot \left[c_{i0} + \int_0^t e^{(\lambda_i + \mu_n^2 \kappa)t'} \cdot \left\{ \bar{J}_{ij} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\kappa_1 z^m \Psi_{in}\Phi_1 + \kappa_2 z^m \Psi_{Mn}\Phi_M \right) \right\} dt' \right]$$

Двухслойная среда. Рассмотрим диффузию примесей в двухслойной среде при граничных условиях первого рода на внешних границах

$$z = 0 \quad c_1 = 0;$$

$$z = b \quad \kappa_2 \frac{\partial c_2}{\partial z} + \alpha_2 c_2 = 0;$$

$$z = l \quad c_1 = c_2 \quad \kappa_1 \frac{\partial c_1}{\partial z} = \kappa_2 \frac{\partial c_2}{\partial z}.$$

Собственные функции имеют вид

$$\Psi_{in} = A_{in}\sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\kappa_i}} z\right) + B_{in}\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\kappa_i}} z\right),$$

Из граничного условия при $z = 0$ имеем $B_{10} = 0$ и

$$\Psi_{1n} = A_{1n}\sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\kappa_i}} z\right),$$

$$\Psi_{2n} = A_{2n}\sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\kappa_i}} z\right) + B_{2n}\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\kappa_i}} z\right).$$

Используя остальные граничные условия, имеем уравнения

$$A_{1n}\sin\left(\frac{\mu_n l}{\sqrt{\kappa_1}}\right) =$$

$$= A_{2n}\sin\left(\frac{\mu_n l}{\sqrt{\kappa_2}}\right) + B_{2n}\cos\left(\frac{\mu_n l}{\sqrt{\kappa_2}}\right),$$

$$A_{1n}\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}\cos\left(\frac{\mu_n l}{\sqrt{\kappa_1}}\right) =$$

$$= A_{2n}\cos\left(\frac{\mu_n l}{\sqrt{\kappa_2}}\right) - B_{2n}\sin\left(\frac{\mu_n l}{\sqrt{\kappa_2}}\right),$$

$$A_{2n}\cos\left(\frac{\mu_n b}{\sqrt{\kappa_2}}\right) - B_{2n}\sin\left(\frac{\mu_n b}{\sqrt{\kappa_2}}\right) + \frac{\alpha}{\mu_n\sqrt{\kappa_2}} \cdot$$

$$\cdot \left[A_{2n}\sin\left(\frac{\mu_n b}{\sqrt{\kappa_2}}\right) + B_{2n}\cos\left(\frac{\mu_n b}{\sqrt{\kappa_1}}\right) \right] = 0.$$

Собственные функции определяются с точностью до нормировки, поэтому для определения их имеем уравнения

$$\begin{vmatrix} \sin\left(\frac{l}{b}\eta\right) & \cos\frac{l}{b}\eta \\ \sin\left(\frac{l}{b}\eta\right) & -\sin\left(\frac{l}{b}\eta\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{2n} \\ B_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\gamma \\ N\cos\gamma \end{vmatrix},$$

откуда находим

$$A_{2n} = \frac{1}{\Delta}\left[-\sin\gamma\sin\frac{l}{b}\eta - N\cos\gamma\cos\frac{l}{b}\eta \right],$$

$$B_{2n} = \frac{1}{\Delta}\left[N\cos\gamma\sin\frac{l}{b}\eta - \sin\gamma\cos\frac{l}{b}\eta \right],$$

$$\Delta = -1, \quad \gamma = \frac{l\mu_n}{\sqrt{\kappa_1}}, \quad \eta = \frac{b\mu_n}{\sqrt{\kappa_2}},$$

$$N = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}, \quad h = \frac{bl}{\kappa_2}.$$

Собственные значения находятся как корни определителя

$$\begin{vmatrix} \sin\gamma & -\sin\frac{l}{b}\eta & -N\cos\frac{l}{b}\eta \\ N\cos\gamma & -\cos\frac{l}{b}\eta & \sin\frac{l}{b}\eta \\ 0 & \frac{h}{\eta}\sin\eta & \frac{h}{\eta}\cos\eta-\sin\eta \end{vmatrix}=0.$$

Решение задачи имеет вид

$$c_i=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N_n}e^{-\mu_n^2\kappa_i t}\Psi_{in}(z)\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^l \Psi_{1n}c_{10}(z)dz+\int_l^b\Psi_{2n}c_{20}(z)dz\right],$$

$$N_n=\int_0^l\Psi_{1n}^2dz+\int_l^b\Psi_{2n}^2dz,$$

$$\Psi_{1n}(z)=\sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\kappa_1}}z\right),$$

$$\Psi_{2n}(z)=A_{2n}\sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\kappa_1}}z\right)+$$

$$+B_{2n}\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\kappa_2}}z\right).$$

При начальных и граничных условиях

$$c_1(z,0)=f_1(z),\quad c_2(z,0)=f_2(z),$$

$$z=0\quad c_i=0,\quad z=b\quad \kappa_2\frac{\partial c_2}{\partial z}+\alpha_2c_2=0,$$

$$z=l\quad c_1=c_2,\quad \kappa_1\frac{\partial c_1}{\partial z}=\kappa_2\frac{\partial c_2}{\partial z}.$$

решение имеет вид

$$c_1(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}e^{-(\lambda_1+\mu_n\kappa_1)t}\Psi_1\cdot$$

$$\cdot\left[\overline{F}+\int_0^t e^{(\lambda_1+\kappa_1\mu_n^2)t'}Adt'\right],$$

$$c_2(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N}e^{-(\lambda_2+\mu_n\kappa_2)t}\Psi_2\cdot$$

$$\cdot\left[\overline{F}+\int_0^t e^{(\lambda_2+\kappa_2\mu_n^2)t'}Adt'\right],$$

$$\overline{F}=\int_0^a\Psi_1f_1dz+\int_a^b\Psi_2f_2dz,$$

$$A=\int_0^a\Psi_1J_1dz+\int_a^b\Psi_2J_2dz,$$

где $$N=\int_0^a\Psi_1^2dz+\int_a^b\Psi_2^2dz.$$

$$\Psi_1=\sin\mu_nz.$$

$$\Psi_2=A_2\sin\mu_nz+B_2\cos\mu_nz.$$

Многослойная среда. Рассмотрим первую краевую задачу для внешних границ в многослойной среде с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial c_i}{\partial t}+\lambda_ic_i=\kappa_i\frac{\partial^2c_i}{\partial z^2}\tag{7}$$

и следующих начальных и граничных условиях 4 рода

$$t=0\quad c_i=c_{i0},\qquad z=0\quad c_1=\Phi_1(t),$$

$$z=l_n\quad c_n=\Phi_n(t),\tag{8}$$

$$c_j=c_{j+1},\qquad \kappa_j\frac{\partial c_j}{\partial z}=\kappa_{j+1}\frac{\partial c_{j+1}}{\partial z}.$$

Преобразуя по Лапласу задачу, имеем

$$\frac{d^2\overline{c}_i}{dz}-\frac{P+\lambda_i}{\kappa_i}\overline{c}_i=\frac{\overline{c}_{i0}}{\kappa_i},$$

$$\begin{gathered} z=0\quad \overline{c}_i=\Phi_1(P), \\ z=l_n\quad \overline{c}_n=\Phi_n(P), \\ z=l_j\quad \overline{c}_j=\overline{c}_{j+1}, \\ \kappa_j\frac{d\overline{c}_j}{dz}=\kappa_{j+1}\frac{d\overline{c}_{j+1}}{dz}. \end{gathered}\tag{9}$$

Решение (9) имеет вид

$$\overline{c}_i=\frac{\overline{c}_{i0}}{P+\lambda_i}+$$

$$+A_i\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{P+\lambda_i}{\kappa_i}}z\right)+B_i\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{P+\lambda_i}{\kappa_i}}z\right)$$

Граничные условия для $2n$ произвольных постоянных λ_i, P_i дают $2n$ алгебраических линейных уравнений

$$\frac{c_{i0}}{P+\lambda_i}+A_i\operatorname{ch}\left(l_i\sqrt{\frac{P+\lambda_i}{\kappa_i}}\right)+$$

$$+B_i\operatorname{sh}\left(l_i\sqrt{\frac{P+\lambda_i}{\kappa_i}}\right)=$$

$$=\frac{c_{i+1,0}}{P+\lambda_i}+A_{i+1}\operatorname{ch}\left(l_i\sqrt{\frac{P+\lambda_{i+1}}{\kappa_{i+1}}}\right)+$$

$$+B_{i+1}\operatorname{sh}\left(l_i\sqrt{\frac{P+\lambda_{i+1}}{\kappa_{i+1}}}\right).$$

$$\sqrt{\kappa_i(P+\lambda_i)}\cdot$$

$$\cdot\left(A_i\operatorname{sh}\left(l_i\sqrt{\frac{P+\lambda_i}{\kappa_i}}\right)+B_i\operatorname{ch}\left(l_i\sqrt{\frac{P+\lambda_i}{\kappa_i}}\right)\right)=$$

$$= \sqrt{\kappa_{i+1}(P+\lambda_{i+1})} +$$

$$+ \left(A_{i+1} \operatorname{sh}\left(l_i \sqrt{\frac{P+\lambda_{i+1}}{\kappa_{i+1}}} \right) + \right. \qquad (10)$$

$$\left. + B_{i+1} \operatorname{ch}\left(l_i \sqrt{\frac{P+\lambda_{i+1}}{\kappa_{i+1}}} \right) \right),$$

$$A_1 = \overline{\Phi}_1 - \frac{c_{10}}{P+\lambda_1},$$

$$\overline{\Phi}_n = \frac{\overline{c}_{n0}}{P+\lambda_n} + A_n \operatorname{ch}\left(l_n \sqrt{\frac{P+\lambda_n}{\kappa_n}} \right) +$$

$$+ B_n \operatorname{sh}\left(l_n \sqrt{\frac{P+\lambda_n}{\kappa_n}} \right).$$

Общее решение в изображениях имеет вид

$$\overline{c}_i = \frac{c_{i0}}{P+\lambda_i} + \frac{\Delta_{A_i}}{\Delta} \operatorname{ch}\left(z\sqrt{\frac{P+\lambda_i}{\kappa_i}} \right) +$$

$$+ \frac{\Delta_{B_i}}{\Delta} \operatorname{sh}\left(z\sqrt{\frac{P+\lambda_i}{\kappa_i}} \right),$$

где Δ – главный определитель системы (10), $\frac{\Delta_{A_i}}{\Delta}$, $\frac{\Delta_{B_i}}{\Delta}$ – дополнительные определители, получающиеся при замене столбцов Δ, соответствующих A_i и B_i, столбцом из свободных членов. Если $\Delta = 0$ имеет простые корни, то, применяя теорему разложения, получим решение в виде

$$c_i(z,t) = c_{i0} e^{-\lambda_i t} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta_{A_i}(P_m)}{\Delta'(P_m)} \operatorname{ch}\left(z\sqrt{\frac{P_m+\lambda_i}{\kappa_i}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta_{B_i}(P_m)}{\Delta'(P_m)} \operatorname{sh}\left(z\sqrt{\frac{P_m+\lambda_i}{\kappa_i}} \right) \right\} e^{-P_m kt},$$

где P_m – корни уравнения $\Delta(P) = 0,\ \Delta' = \frac{\partial}{\partial P}[\Delta/P]$.

Первая краевая задача для двухслойной среды. В случае первой краевой задачи при

$$c_1(0,t) = c_{10}, \qquad c_2(\infty,t) = 0$$

решение в изображениях имеет вид

$$\overline{c}_1(z,P) = \frac{c_{10}}{P} \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} z \right) -$$

$$- \frac{\alpha c_{10}}{P} \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\exp\left(\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} z \right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} z \right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right) - \alpha \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right)},$$

$$\overline{c}_2(z,P) = \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} (z-l) \right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{c_{10}}{P} \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right) - \right.$$

$$- \frac{\alpha c_{10}}{P} \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right) \cdot$$

$$\left. \cdot \left[\frac{\exp\left(\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right)}{\exp\left(\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right) - \alpha \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right)} \right] \right\},$$

где

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \Big/ 1 + \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}.$$

При $\alpha < 1$, разлагая знаменатель в ряд, получим

$$\frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right)}{1 - \alpha \exp\left(-2\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \exp\left(-(2n-1)\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} l \right)$$

Переходя от изображений к оригиналам, имеем решения

$$\frac{c_1}{c_{10}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \right) -$$

$$- \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \left[\operatorname{erfc} \frac{2nl - z}{2\sqrt{\kappa_1 t}} - \operatorname{erfc} \frac{2nl + z}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \right],$$

$$\frac{c_2}{c_{20}} = \frac{2\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}}{1+\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \mathrm{erfc}\left[\frac{z-l+(2n-1)l\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}}{2\sqrt{\kappa_2 t}}\right]$$

Вторая краевая задача для двухслойной среды. Рассмотрим вторую краевую задачу при условиях

$$z=0 \quad -\kappa_1 \frac{\partial c_1}{\partial z} = \gamma_0,$$

$$z \to \infty \quad \frac{\partial c_2}{\partial z} = 0, \tag{11}$$

$$z=l \quad c_1 = c_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial c_1}{\partial z} = \kappa_2 \frac{\partial c_2}{\partial z}.$$

Преобразуя по Лапласу $\bar{c}_i = \int_0^{\infty} c_i e^{-Pt} dt$, получим для изображений

$$\kappa_1 \frac{d^2 \bar{c}_1}{dz^2} - P\bar{c}_1 = 0, \; \kappa_2 \frac{d^2 \bar{c}_2}{dz^2} - P\bar{c}_2 = 0,$$

$$z=0 \quad -\kappa_1 \frac{d\bar{c}_1}{dz} = \bar{\gamma}_0, \quad z=l \quad \frac{d\bar{c}_2}{dz} = 0 \tag{12}$$

$$z=l \quad \bar{c}_1 = \bar{c}_2, \quad \kappa_1 \frac{d\bar{c}_1}{dz} = \kappa_2 \frac{d\bar{c}_2}{dz}.$$

Решение (11)–(12) имеет вид

$$\bar{c}_1 = A_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} z\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_1}} z\right),$$
$$\bar{c}_2 = A_3 \exp\left(-\sqrt{\frac{P}{\kappa_2}} z\right). \tag{13}$$

Найдя постоянные и подставив их в (13), получим решение в изображениях и по таблицам оригиналов найдем решение

$$c_1 = \frac{2\gamma_0}{\kappa_1}\sqrt{\frac{\kappa_1 t}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} g^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \exp\left[-\frac{(2l(n+1)+z)^2}{4\kappa_1 t}\right] - \right.$$

$$\left. - g\exp\left[-\frac{(2ln-z)^2}{4\kappa_1 t}\right]\right\} - \frac{\gamma_0}{\kappa_1} \sum_{n=1}^{\infty} g^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \left\{ (2ln-z) \mathrm{gerfc} \frac{2nl-z}{2\sqrt{\kappa_1 t}} - \right.$$

$$\left. - [2l(n-1)+z] \mathrm{erfc} \frac{2l(n-1)+z}{2\sqrt{\kappa_1 t}} \right\},$$

$$c_2(z,t) = \frac{2\gamma_0}{\kappa_1\left(\sqrt{\kappa_1}+\sqrt{\kappa_2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} g^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \exp \frac{1}{4t}\left[-\frac{z-l}{\sqrt{\kappa_2}} - \frac{l(2n-1)^2}{\sqrt{\kappa_1}}\right] -$$

$$- \left[\frac{z-l}{\sqrt{\kappa_2}} + \frac{l(2n-1)}{\sqrt{\kappa_1}}\right] \cdot$$

$$\cdot \mathrm{erfc}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{z-l}{\sqrt{\kappa_2 t}} + \frac{l(2n-1)}{\sqrt{\kappa_1 t}}\right]\right\}.$$

Таким образом, представленные аналитические решения могут быть использованы для получения вертикального распределения радионуклидов в многослойных донных осадках океанов и морей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулин С.Б., Поликарпов Г.Г., Ааркрог А. и др. Геохронологическое исследование поступления ^{137}Cs в донные отложения северо-западного шельфа, континентального склона и глубоководной части Черного моря. ДНАНУ, 1997, № 7, с. 133-139.

2. Batrakov G.F., Chudinovskikh T.V., Zemlyanoy A.D., Eremeev V.N. On the geochemistry of Chernobyl ^{137}Cs and ^{90}Sr in the Black Sea. ДНАНУ, 1998, № 10, с. 122-126.