ПОСТРОЕНИЕ МОНОТОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

С.В. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail:kocher@stel.Sebastopol.ua

В работе рассматривается класс монотонных разностных дискретизаций для решения уравнения переноса. Предложена упрощенная монотонная консервативная разностная схема для эффективного решения уравнения переноса пассивной примеси.

При решении задач переноса пассивной примеси в океане естественным образом встает вопрос о выборе метода ее численной реализации. Всем известны трудности, при этом возникающие, – это и сглаживающий эффект схем типа направленных разностей и немонотонное поведение решения при использовании центрально-разностных схем.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Рассмотрим явную схему вида:

$$\Delta^t u = -\lambda\,\Delta_{-1/2}\,u - \\ -\lambda\left[\beta\left(\frac{\Delta_{-1/2}\,u}{\Delta_{1/2}\,u}\right)\Delta_{1/2}\,u - \beta\left(\frac{\Delta_{-3/2}\,u}{\Delta_{-1/2}\,u}\right)\Delta_{-1/2}\,u\right], \qquad (2)$$

где

$$\lambda = \frac{\tau}{h},\ \Delta^t u = u^0 - u_0,\ \Delta_{i+1/2}\,u = u_{i+1} - u_i.$$

Схема (2) аппроксимирует уравнение (1) со вторым порядком по h (при фиксированном λ) тогда и только тогда, когда

$$\beta(1) = \frac{1-\lambda}{2};\quad \frac{\beta(-1)+\beta(3)}{2} = \frac{1-\lambda}{2}. \qquad (3)$$

Отметим, что при $\beta = 0$ имеем направленную разность влево, $\beta = 1$ вправо, а при $\beta = 1/2$ – центрально-разностную аппроксимацию.

Для аппроксимации с третьим порядком наряду с (3) должны выполняться еще и условия:

$$\beta'(1) = \frac{1-\lambda^2}{6};$$

$$\beta'(-1) - 2\beta'(3) + \frac{\beta'(-1)-\beta'(3)}{2} = \frac{\lambda^2-1}{2}; \qquad (4)$$

$$\frac{\beta'(1)-\beta'(7)}{2} = \frac{\lambda^2-1}{2}.$$

<u>Монотонность.</u> Считаем, что $\lambda \in (0,1)$. Схема считается монотонной, если выполнено следующее условие — $-\dfrac{\Delta^t u}{\Delta_{-1/2}\,u} \in [0,1]$.

Здесь $\Delta^t u$ определено равенством (2). Это условие можно назвать условием «сильной монотонности» или «принудительной монотонности». Оно означает, что u^0 лежит между u_{-1} и u_0.

Если обозначить $F = -\dfrac{\Delta^t u}{\Delta_{-1/2}\,u}$ и положить $x = \dfrac{\Delta_{-1/2}\,u}{\Delta_{1/2}\,u}$; $y = \dfrac{\Delta_{-3/2}\,u}{\Delta_{-1/2}\,u}$, то, используя (2), можно записать F в виде:

$$F(\lambda; x, y) = \lambda\left[1 - \beta(y) + \frac{1}{x}\beta(x)\right].$$

Условие монотонности означает, что

$$F(\lambda; x, y) \in [0,1] \quad \forall\lambda \in (0,1), \quad \forall x, y \in \boldsymbol{R}. \ (5)$$

Можно сформулировать более слабое условие, которое назовем просто «монотонность»:

$$F(\lambda; x, y) \in [0,1] \quad \forall\lambda \in (0,1), \quad \forall x, y \in \boldsymbol{R}_+. \ (6)$$

Как условие (5), так и условие (6) гарантирует, что схема (2) сохраняет монотонность, т.е. из $\left(\Delta_{j+1/2}\,u^n\right)\left(\Delta_{j-1/2}\,u^n\right) > 0$ $\forall j$ следует: $\left(\Delta_{j+1/2}\,u^{n+1}\right)\left(\Delta_{j-1/2}\,u^{n+1}\right) > 0 \ \ \forall j$.

С точки зрения уравнения (1), условия (5), (6) являются естественными: если начальная функция монотонна, она отражает специфику решения (как бегущей вправо волны). Условие (5) осуществляет принудительную монотонизацию на подинтервалах $(jh, (j+1)h)$. Но условие (5) автоматически гарантирует устойчивость схемы (2) в пространстве $\boldsymbol{C}$. Действительно, (2) можно переписать в виде:

$$u^0 = \left(1 - F(\lambda; x, y)\right)u_0 + F(\lambda; x, y)\cdot u_{-1}. \ (7)$$

Это означает, что u^0 получается путем интерполяции между u_{-1} и u_0, которая, в данном случае, нелинейна. Или так:

$$u_j^{n+1}=\left(1-F_j^n\right)u_j^n+F_j^n\cdot u_{j-1}^n;$$

$$\left\|u^n\right\|\overset{def}{=}\max_j\left|u_j^n\right|;$$

$$\left|u_j^{n+1}\right|\le\left(1-F_j^n\right)\left|u_j^n\right|+F_j^n\left|u_{j-1}^n\right|\le$$
$$\le\left(1-F_j^n+F_j^n\right)\left\|u^n\right\|=\left\|u^n\right\|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left\|u^{n+1}\right\|\le\left\|u^n\right\|,$$

что и означает устойчивость.

Условие (6) устойчивости не гарантирует, о ней нужно заботиться отдельно.

Последнее условие в (4), вообще говоря, противоречит условиям (5), (6). Действительно, условие (6) эквивалентно неравенствам:

$$0\le\lambda\left(1-\beta(y)+\frac{\beta(x)}{x}\right)\le 1,\qquad \forall\lambda\in[0,1],\quad x,y\in R_+, \tag{8}$$

из которых следует, что $\beta(y)$ – ограниченная функция, а значит $\dfrac{\beta(x)}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$.

Таким образом, из (8) с необходимостью следует неравенство:

$$-\frac{1-\lambda}{\lambda}\le\beta(y)\le 1. \tag{9}$$

Последнее условие в (4) означает, что $\beta(7)=(1-\lambda)\left(\dfrac{3}{2}+\lambda\right)$ и неравенство $\beta(7)\le 1$ выполнено лишь при $\lambda>\dfrac{1}{2}$. Значит, полную аппроксимацию третьего порядка мы можем получить лишь при $\lambda\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Найдем некоторые условия на β, достаточные для выполнения условия (5):

$$F(\lambda;x,y)=\lambda\left(1-\beta(y)\right)+(1-\lambda)\left[\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{\beta(x)}{x}\right].$$

Очевидно, что

$F(\lambda;x,y)\in[0,1]\quad\forall\lambda\in[0,1],\quad\forall x,y\in\boldsymbol{R}$, если выполнены неравенства:

$$\begin{cases}0\le 1-\beta(y)\le 1\\ 0\le\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\dfrac{\beta(x)}{x}\le 1\end{cases},$$

которые приводят к условиям на β:

$$\begin{cases}\beta(x)\equiv 0\quad \text{при } x\le 0;\\ 0\le\beta(x)\le\dfrac{1-\lambda}{\lambda}x,\ x\in\left[0,\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\right];\\ 0\le\beta(x)\le 1,\ x\in\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda},+\infty\right).\end{cases}$$

В соответствии с этим условия (3), (4) перепишутся в виде:

$$\beta(1)=\frac{1-\lambda}{2},\ \beta(3)=1-\lambda. \tag{10}$$

$$\beta'(1)=\frac{1-\lambda^2}{6},\ \beta'(3)=\frac{\lambda(1-\lambda)}{4},$$

$$\beta'(7)=(1-\lambda)\left(\frac{3}{2}+\lambda\right),\ \frac{1}{2}\le\lambda\le 1. \tag{11}$$

Рассмотрим некоторые варианты схем:

$$\beta(x)=\begin{cases}(1-\lambda)|x|, & |x|\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1-\lambda}{2}, & |x|>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

– «Лакс–Вендрофф», вопрос об устойчивости открыт;

$$\beta(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ (1-\lambda)x, & 0\le x\le\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1-\lambda}{4}(x+1), & \dfrac{1}{3}<x\le 3\\ 1-\lambda, & 3<x\end{cases}$$

– «Fromm монотонный» второго порядка;

$$\beta(x)=\frac{1-\lambda}{4}(1+x)$$

– немонотонная схема «Fromm» второго порядка;

$$\beta(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ -\dfrac{1-\lambda}{12}x(x-7), & 0\le x\le 3\\ 1-\lambda, & x>3\end{cases}$$

– схема второго порядка аппроксимации.

Как мы видим, при различном выборе β в(2) можно получать целый класс различных аппроксимаций для решения уравнения (1).

Пусть уравнение переноса имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathrm{v}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\kappa^x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\kappa^y\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{12}$$

Для его решения выберем следующую разностную схему, построенную методом дробных шагов на основе результатов работы [1]:

$$
\frac{\varphi_{ij}^{k+1/2}-\varphi_{ij}^{k}}{\tau/2}-
$$
$$
-\frac{1}{h}\left[\kappa_{i+1/2}^{x}\left(1+R_{i+1/2}^{u}\cdot\mu_{i+1/2}^{u}+R_{i+1/2}^{u}\right)\frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{ij}}{h}-\right.
$$
$$
\left.-\kappa_{i-1/2}^{x}\left(1+R_{i-1/2}^{u}\cdot\mu_{i-1/2}^{u}-R_{i-1/2}^{u}\right)\frac{\varphi_{ij}-\varphi_{i-1,j}}{h}\right]^{k+1/2}-
$$
$$
-\frac{1}{h}\left[\kappa_{j+1/2}^{y}\left(1+R_{j+1/2}^{v}\cdot\mu_{j+1/2}^{v}+R_{j+1/2}^{v}\right)\frac{\varphi_{i,j+1}-\varphi_{ij}}{h}-\right.
$$
$$
\left.-\kappa_{j-1/2}^{x}\left(1+R_{j-1/2}^{v}\cdot\mu_{j-1/2}^{v}-R_{j-1/2}^{v}\right)\frac{\varphi_{ij}-\varphi_{i,j-1}}{h}\right]^{k}=0 \qquad (13)
$$

$$
\frac{\varphi_{ij}^{k+1}-\varphi_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2}-
$$
$$
-\frac{1}{h}\left[\kappa_{i+1/2}^{x}\left(1+R_{i+1/2}^{u}\cdot\mu_{i+1/2}^{u}+R_{i+1/2}^{u}\right)\frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{ij}}{h}-\right.
$$
$$
\left.-\kappa_{i-1/2}^{x}\left(1+R_{i-1/2}^{u}\cdot\mu_{i-1/2}^{u}-R_{i-1/2}^{u}\right)\frac{\varphi_{ij}-\varphi_{i-1,j}}{h}\right]^{k+1/2}-
$$
$$
-\frac{1}{h}\left[\kappa_{j+1/2}^{y}\left(1+R_{j+1/2}^{v}\cdot\mu_{j+1/2}^{v}+R_{j+1/2}^{v}\right)\frac{\varphi_{i,j+1}-\varphi_{ij}}{h}-\right.
$$
$$
\left.-\kappa_{j-1/2}^{x}\left(1+R_{j-1/2}^{v}\cdot\mu_{j-1/2}^{v}-R_{j-1/2}^{v}\right)\frac{\varphi_{ij}-\varphi_{i,j-1}}{h}\right]^{k+1}=0
$$

где

$$
R_{i+1/2}^{u}=-\frac{u_{i+1/2}\cdot h}{2\cdot\kappa_{i+1/2}^{x}},\ R_{j+1/2}^{v}=-\frac{v_{j+1/2}\cdot h}{2\cdot\kappa_{j+1/2}^{y}},
$$

$$
\mu(R)=\begin{cases}\operatorname{cth}R-\dfrac{1}{R} & \text{схема Ильина}\\ \operatorname{sign}R & \text{схема центральных разностей}\\ 0 & \text{схема направленных разностей}\end{cases}
$$

При такой записи появляется возможность рассматривать целый класс конечно-разностных аппроксимаций.

Рассмотрим первый вариант схем. Весьма трудоемким является вычисление гиперболических тангенсов на каждом итерационном шаге, поэтому можно воспользоваться следующей процедурой[2]. Подставим разложения в ряд экспонент в выражение:

$$
\operatorname{cth}R=\frac{e^{R}+e^{-R}}{e^{R}-e^{-R}}=\frac{1+\dfrac{R^{2}}{2!}+\dfrac{R^{4}}{4!}+\ldots}{R+\dfrac{R^{3}}{3!}+\dfrac{R^{5}}{5!}+\ldots}, \quad (14)
$$

откуда имеем для $R>0$ $\operatorname{cth}R\le\dfrac{1}{R}$, $\lim\limits_{R\to 0}R\operatorname{cth}R=1$.

В зависимости от требуемой точности можно варьировать количество членов разложения. В первом приближении имеем:

$$
\operatorname{cth}R=\frac{1+\dfrac{R^{2}}{2}}{R}. \quad (15)
$$

Величина μR в схеме направленных разностей имеет порядок R, а в схеме с использованием (15) порядок $R^2/2$, что, в отличие от схем центральных разностей ($\mu R\equiv 0$), позволяет получать монотонное решение. Применение подобных схем оказывается особенно важным при решении сопряженных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов.–Севастополь: ЭКОСИ–Гидрофизика, 2002, 238 с.
2. Кочергин С.В. Вычислительные аспекты решения задачи идентификации параметров модели переноса пассивной примеси // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь: НАН Украины, Морской гидрофизический институт, 2001, С. 45–50.