

# ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ БАССЕЙНЕ, ЗАПОЛНЕННОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

О.А. Дымова, Л.В. Черкесов

Морской гидрофизический институт  
НАН Украины  
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2  
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

В рамках линейной теории длинных волн получено аналитическое решение задачи о волнах, возникающих в ограниченном бассейне, заполненном трехслойной жидкостью. Исследовано влияние изменения частоты атмосферного давления на характер генерируемого волнового процесса. Показано, что возникающие волны имеют существенно бароклинный характер в узком диапазоне частот вблизи частот свободных бароклиных колебаний.

Исследование динамики длинных волн в двумерном бассейне является важным этапом анализа динамических процессов в замкнутых бассейнах [1,2]. Так, в работе [3] рассмотрены вынужденные периодические колебания однородной жидкости в параболическом бассейне с вертикальными стенками. Наличие плотностной стратификации делает возможным возникновение внутренних волн. Поэтому, зная частотный состав и структуру таких колебаний, можно изучить изменение пространственного распределения амплитудных характеристик вынужденных волн [4], а также их переход от баротропного характера движения к бароклинному [5] при пространственно-временных вариациях внешних возмущений. Данная работа посвящена изучению вынужденных волн, генерируемых периодически изменяющимися по времени давлениями в бассейне с параболическим профилем дна, заполненном трехслойной жидкостью.

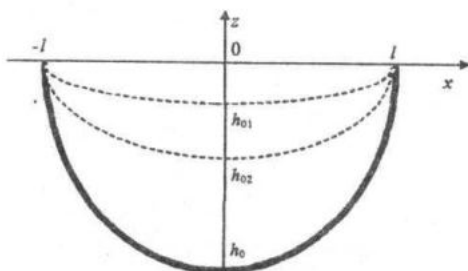


Рис. 1 – Схема бассейна

1. Пусть задан двумерный бассейн со стратифицированной жидкостью, состоящей из трех слоев с постоянной плотностью в каждом из них. При этом  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  – плотности в верхнем, среднем и нижнем слоях соответственно. Глубина бассейна изменяется по параболическому закону:

$$h(x) = h_0 \left(1 - x^2/l^2\right) \quad (-l \leq x \leq l, 0 \leq h \leq h_0). \quad (1)$$

Предполагаем, что первая и вторая поверхности раздела являются параболическими. Плоскость  $z = 0$  совпадает со свободной поверхностью в невозмущенном состоянии, ось  $z$  направлена вертикально вверх. Из массовых сил на жидкость действуют сила тяжести и сила Кориолиса (рис. 1).

Исследуем волны, генерируемые на свободной поверхности и на границах раздела слоев жидкости периодически изменяющимся по времени атмосферным давлением:

$$p_a = p_0 \psi(x) \cos \sigma t + const, \quad |\psi(x)| \leq 1. \quad (2)$$

В выражении (2)  $p_0$  – амплитуда возмущающих давлений,  $\psi(x)$  – безразмерная функция распределения амплитуд колебаний  $p_a$ ,  $\sigma$  – частота,  $t$  – время.

Для решения поставленной задачи использовались нелинейные уравнения теории длинных волн [6]. После их линеаризации была получена система девяти дифференциальных уравнений для определения нормальных  $u_i(x,t)$  и касательных  $v_i(x,t)$  к берегу волновых составляющих скорости, возвышений свободной поверхности  $\zeta_1(x,t)$  и поверхностей раздела слоев жидкости  $\zeta_2(x,t)$  и  $\zeta_3(x,t)$ . Решение этой системы искалось в виде периодических по времени функций:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i(x) \sin \sigma t, \quad v_i = \bar{v}_i(x) \cos \sigma t, \\ \zeta_i &= \bar{\zeta}_i(x) \cos \sigma t. \end{aligned} \quad (3)$$

Индекс  $i$  соответствует номеру слоя, амплитудные функции обозначены чертой. Также были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} H_1(x) \bar{u}_1(x) &= \varphi_1(x), \quad H_2(x) \bar{u}_2(x) = \varphi_2(x), \\ H_3(x) \bar{u}_3(x) &= \varphi_3(x), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $H_1, H_2, H_3$  – толщина первого, второго и третьего слоев соответственно. После подстановки выражений (2), (3) и (4), система из девяти дифференциальных уравнений свелась к следующей системе:

$$\begin{aligned}(\sigma^2 - f^2)\varphi_1 &= -gH_1 \left( \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_3}{dx^2} + \sigma d_1 \frac{d\psi}{dx} \right), \\(\sigma^2 - \bar{f})\varphi_2 &= -gH_2 \left( \gamma_1 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_3}{dx^2} + \sigma d_2 \frac{d\psi}{dx} \right), \\(\sigma^2 - \bar{f}_1)\varphi_3 &= -gH_3 \left( \gamma_3 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \gamma_2 \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_3}{dx^2} + \sigma d_3 \frac{d\psi}{dx} \right),\end{aligned}\quad (5)$$

где  $f$  – параметр Кориолиса,  $\gamma_1 = \rho_1/\rho_2$ ,  $\gamma_2 = \rho_2/\rho_3$ ,  $\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2$ ,  $\bar{f}$  и  $\bar{f}_1$  – коэффициенты, зависящие от характеристик бассейна и стратификации,  $d_i = p_0/g\rho_i$ . Требуя ограниченности нормальных к берегу составляющих скорости при  $x = \pm l$ , получаем граничные условия для функции  $\varphi_i$ :

$$\varphi_i(\pm l) = 0. \quad (6)$$

Найдем решение системы (5), выбирая в качестве  $\psi(x)$  многочлены степени  $n$ .

2. Пусть  $n = 1$ , тогда

$$\psi(x) = k_1 x/l + k_0. \quad (7)$$

В этом случае функции  $\varphi_i$  ищем в виде полиномов второй степени, удовлетворяющих граничным условиям (6)

$$\varphi_i = A_{1i}(x^2 - l^2), \quad (8)$$

где  $A_{1i}$  – произвольные постоянные.

Выбор функций  $\varphi_i$  в виде (8) позволяет свести (5) к системе неоднородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_{1i}$ . Найдя  $A_{1i}$ , определяем амплитуды возвышений свободной поверхности и поверхностей раздела слоев жидкости:

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_1 &= \frac{2x}{\sigma}(A_{11} + A_{12} + A_{13}), \\ \bar{\zeta}_2 &= \frac{2x}{\sigma}(A_{12} + A_{13}), \quad \bar{\zeta}_3 = \frac{2x}{\sigma}A_{13}.\end{aligned}\quad (9)$$

Из (9) видно, что для рассматриваемого давления (2), (7) возвышения свободной

поверхности и поверхностей раздела имеют один узел при  $x = 0$ . На границах бассейна они принимают максимальные по абсолютной величине значения. Соотношения амплитуд отклонения свободной поверхности и поверхностей раздела зависят от частоты вынуждающего давления. Если частота вынуждающей силы совпадает с частотой свободных колебаний системы, то имеет место резонансное увеличение волновых характеристик.

3. Исследуем волновое движение на конкретных примерах. Пусть ширина бассейна  $2l=100$  км, его максимальная глубина составляет 2 км. Параметр Кориолиса соответствует  $47^\circ$  северной широты. Рассмотрим три вида стратификации жидкости. Первый соответствует случаю, когда наибольшая толщина первого слоя составляет  $H_{01} = 50$  м, наибольшая толщина второго слоя тоже  $H_{02} = 50$  м,  $\varepsilon_1 = 1,5 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_2 = 6 \times 10^{-4}$ . Во втором случае наибольшая толщина первого слоя  $H_{01} = 50$  м, а наибольшая толщина второго слоя –  $H_{02} = 450$  м,  $\varepsilon_1 = 1,5 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_2 = 1 \times 10^{-4}$ . В третьем –  $H_{01} = 100$  м,  $H_{02} = 400$  м,  $\varepsilon_1 = 3 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_2 = 2 \times 10^{-4}$ . Пусть максимальный перепад давления составляет 1 кПа, тогда  $p_0=1$  кПа.

Результаты расчетов максимальных по абсолютной величине значений отношения  $\zeta_3/\zeta_1$ , полученных с помощью выражений (9) приведены в таблице 1. При этом периоды возмущающих давлений, при которых сильно выражены резонансные явления, исключены из рассмотрения.

Рассмотрим зависимость  $\max|\zeta_3/\zeta_1|$  от  $\tau$  для бассейна шириной 100 км. Из анализа полученных данных следует, что волновое движение при  $\tau$  менее 14ч можно считать баротропным, здесь отношение  $|\zeta_3/\zeta_1|$  близко к единице. При значении  $|\zeta_3/\zeta_1|$  от 2 до 5 процесс можно считать переходным. Последующий рост  $\max|\zeta_3/\zeta_1|$  указывает на бароклиный характер движения. Исследуем влияние стратификации на значение отношения  $|\zeta_3/\zeta_1|$ . Так для первой стратификации заметное изменение  $|\zeta_3/\zeta_1|$  начинается с 15ч, с дальнейшим увеличением периода  $|\zeta_3/\zeta_1|$  растет более резко. Отношение  $|\zeta_3/\zeta_1|$  увеличивается в 2,68 раза при изменении  $\tau$  от 15 до 15,5 часов. Вблизи резонансного значения периода, соответствующего периоду бароклиной одноузловой моды сво-

Таблица 1 – Зависимость  $\max|\zeta_3/\zeta_1|$  от периода вынуждающих колебаний (одноузловая сейша)

| Первая стратификация |                         | Вторая стратификация |                         | Третья стратификация |                         |
|----------------------|-------------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|-------------------------|
| $\tau, \text{ч}$     | $\max \zeta_3/\zeta_1 $ | $\tau, \text{ч}$     | $\max \zeta_3/\zeta_1 $ | $\tau, \text{ч}$     | $\max \zeta_3/\zeta_1 $ |
| 0,44                 | 0,95                    | 0,44                 | 0,79                    | 0,44                 | 0,75                    |
| 15                   | 1,86                    | 15                   | 1,447                   | 12                   | 1,105                   |
| 15,2                 | 2,287                   | 15,4                 | 2,369                   | 14                   | 3,044                   |
| 15,4                 | 3,387                   | 15,5                 | 3,165                   | 14,25                | 5,578                   |
| 15,5                 | 5                       | 15,6                 | 5,485                   | 14,3                 | 6,891                   |
| 15,58                | 9,963                   | 15,65                | 9,996                   | 14,35                | 9,151                   |
| 15,71                | 10,476                  | 15,75                | 10,093                  | 14,37                | 10,588                  |
| 15,73                | 7,481                   | 15,76                | 8,147                   | 14,6                 | 10,039                  |
| 15,75                | 5,735                   | 15,77                | 6,794                   | 14,65                | 6,744                   |
| 15,8                 | 3,466                   | 15,8                 | 4,431                   | 14,7                 | 5,014                   |
| 15,9                 | 1,699                   | 15,85                | 2,658                   | 14,85                | 2,806                   |

бодных колебаний и составляющего 15,58ч значение  $|\zeta_3/\zeta_1|$  близко 10. После прохождения резонанса отношение  $|\zeta_3/\zeta_1|$  уменьшается и при  $\tau$  большем 15,8ч движение снова носит баротропный характер. Таким образом, движение жидкости будет бароклинным в интервале периода вынуждающей силы от 15,5ч до 15,75ч.

Для второй стратификации движение можно считать баротропным до  $\tau=15,4$ ч, переходный процесс продолжается до 15,6ч. Отношение  $|\zeta_3/\zeta_1|$  резко возрастает после 15,6ч и для периода вынуждающих давлений от 15,65ч до 15,75ч превышает 10. После 15,85ч движение снова баротропно. При третьей стратификации баротропное движение продолжается до 12ч, что значительно меньше предыдущих случаев. Отношение  $|\zeta_3/\zeta_1|$  достигает значения 5,5 для периода 14,25ч, а при  $\tau$ , лежащем в интервале [14,37ч; 14,6ч], – величина  $|\zeta_3/\zeta_1| > 10$ . Отношение  $|\zeta_3/\zeta_1|$  близко к единице при  $\tau$  большем 14,85ч. Из таблицы 1 видно, что стратификация оказывает существенное влияние на максимальное по абсолютной величине значение отношения  $|\zeta_3/\zeta_1|$ .

Также были исследованы вынужденные одно- и двухузловые колебания в бассейнах шириной 100, 200, 300 км, заполненном слоистой жидкостью. Анализ результатов проведенных исследований показал, что волны, вызываемые периодическими поверхностными давлениями в рассмотренных бассейнах, имеют бароклинный характер только в узком диапазоне периодов вблизи периодов свободных бароклинных колебаний. При этом параметры стратифи-

кации существенно влияют на величину этого диапазона. В основной части интервала между резонансными значениями периода вынуждающей силы волновые движения близки к баротропным. В данной работе исследованы вынужденные колебания в бассейне, заполненном слоистой жидкостью. В дальнейшем планируется перейти к изучению волновых процессов в непрерывно стратифицированной жидкости в параболическом бассейне.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика.–М.: Гостехиздат, 1955.–Т.1.–560 с.
2. Срегенский Л.Н. Теория волновых движений жидкостей.–М.: Наука, 1977.–815 с.
3. Губанова О.В., Хилько Н.В., Черкесов Л.В. Генерация волн в двумерном бассейне переменной глубины периодическими возмущениями атмосферного давления // Морской гидрофизический журнал. – 1997. – №5 – С. 3–10.
4. Ламб Г. Гидродинамика.–М.: Гостехиздат, 1947.–948 с.
5. Алексеев Д.В., Рублев П.В., Черкесов Л.В. Вынужденные волны в ограниченном бассейне, заполненном стратифицированной жидкостью // Доповіді Національної Академії наук України.–2001.–№7.–С. 105–109.
6. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М. Введение в гидродинамику и теорию волн. – С-Пб.: Гидрометеоздат, 1992. –264 с.