ИССЛЕДОВАНИЕ СЕЙШЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ШЕЛЬФОВОЙ ЗОНЫ

С.А. Чернявская, Т. Я. Шульга

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: otw@alpha.mhi.iuf.net

Аналитическими и численными методами изучаются свободные колебания жидкости, заполняющей ограниченный бассейн переменной глубины. Дан анализ влияния геометрических характеристик бассейна на периоды возникающих волн.

Введение. Изучение свободных колебаний жидкости (сейш) в замкнутых бассейнах является важнейшим этапом в изучении динамических процессов в замкнутых бассейнах [1, 2]. Зная особенности этих колебаний, можно прогнозировать изменение пространственного распределения амплитудно-временных характеристик свободных волн.

Колебания в ограниченных бассейнах постоянной глубины исследуются в работах [1-4]. Известно аналитическое решение, описывающее закон колебаний для бассейнов с параболическим профилем дна [5].

Реальные морские бассейны имеют переменную глубину и различную по протяженности шельфовую зону и сложный закон изменения профиля дна. Аналитическое решение задачи о свободных колебаниях жидкости для бассейнов сложной геометрической формы неизвестно. В работе предлагается численное решение этой задачи, для бассейна имеющего геометрические характеристики приближенные к размерам Черного моря. Это решение представляет научный и прикладной интерес.

Цель данной работы сравнить результаты численных экспериментов для бассейнов приближенных к реальным морским водоемам (шириною 300 и 900 км глубиной 1 и 2 км) с данными полученные аналитически при решении этой же задачи. Дать анализ влияния геометрических характеристик бассейна на периоды свободных волн.

Определим граничные условия и рассмотрим аналитическое решение задачи. Пусть ограниченный бассейн переменной глубины без вертикальных стенок заполнен однородной невязкой несжимаемой жидкостью.

Для нахождения горизонтальной скорости $u(x,t)$ и профиля свободной поверхности $\zeta(x,t)$ имеем дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2(uh)}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) допускает решение вида

$$hu = f(x)\cdot \sin\sigma t, \qquad (2)$$

которое описывает стоячие волны. Для определения $f(x)$ из (2) получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$hf'' + \frac{\sigma^2}{g} f = 0. \qquad (3)$$

Выражение профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости через функцию $f(x)$ имеют вид (4), (5).

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -f'(x)\cdot \sin\sigma t, \qquad (4)$$

$$u(x,t) = \frac{f(x)}{h(x)}\cdot \sin\sigma t. \qquad (5)$$

Требуя ограниченности горизонтальной составляющей скорости на границах бассейна ($x=\pm a$) учитывая, что $h(\pm a)=0$, находим граничные условия для $f(x)$:

$$f(\pm a) = 0. \qquad (6)$$

Аналитическое решение задачи о стоячих волнах (сейшах) получено для бассейна, глубина которого меняется по параболическому закону

$$h(x) = h_1\left(1 - x^2 a^{-2}\right), \ (-a \le x \le a). \qquad (7)$$

Дифференциальное уравнение (3) допускает решение в виде многочлена n-й степени ($n \ge 2$). Получено три решения для n = 2, 3, 4, представляющие собой одно-, двух- и трехузловые сейши с периодами τ_1, τ_2, τ_3.

Получено численное решение этой задачи, для бассейнов геометрически приближенным к размерам Черного моря, т.е. бассейнов шириною 300 и 900 км, максимальной глубиной 2 км. Закон изменения глубины в ограниченном бассейне зададим в виде:

$$h(x) = h_1\left(\cos^{\gamma}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right), \qquad (8)$$

где $-a \le x \le a$, h_1 – максимальная глубина бассейна. Показатель степени γ задает величину протяженности прибрежной зоны. С увеличением γ, протяженность шельфовой зоны (расстояния от берега до глубины 100 м) увеличивается (рис. 1).

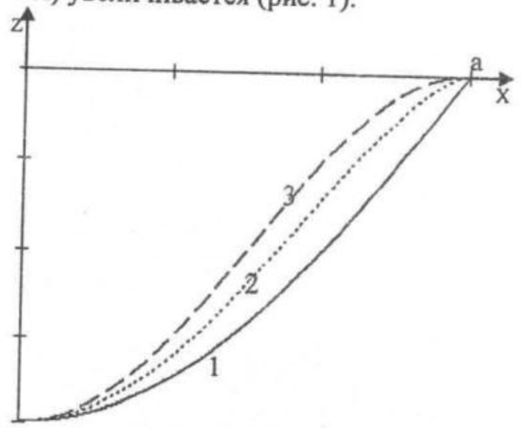

Рис. 1 – профили глубины бассейна 300 км для значений γ=1; γ=1.5; γ=2 (линии 1, 2, 3, соответственно)

Аналитическое решение задачи о стоячих волнах (сейшах) в бассейне с профилем дна вида (8) не известно. Поэтому решение уравнения (3) с граничными условиями (6) ищем методом Рунге-Кутта [6, 7].

В таблице 1 показаны значения периодов свободных колебаний для первых трех мод бассейнов шириной 300 и 900 км. Полученные численно периоды сейш для профиля вида (8) сравниваются с периодами, рассчитанными аналитически для параболического профиля дна вида (7).

Показано, что при неизменных ширине и максимальной глубине бассейна периоды сейш первых трех мод увеличиваются с ростом длины шельфовой зоны. В данной работе, анализируется, как отразится на временных периодах наличие вертикальной стенки на границах бассейна. Т. е. рассмотрена задача о стоячих волнах в бассейне, глубина которого $h(x)$ – для параболического профиля дна задается в виде

$$h(x) = h_1\left(1 - x^2 a^{-2}\right) + h_0 \qquad (9)$$

и косинусоидального в виде

$$h(x) = h_1\left(\cos^{\gamma}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\right) + h_0\,. \qquad (10)$$

где h_1=2 км, h_0 – высота стенки, $2a$=300 км, для значений γ=1; γ=1.1; γ=1.2; …; γ=1.9; γ=2.

Таблица 1 – Значения периодов свободных колебаний для профилей дна вида (8), глубины 300 и 900 км при γ, изменяющемся от 1 до 2

Профиль дна, (γ)	Длина шельфа, (км)	Первая мода		Вторая мода		Третья мода	
		Ширина 300 км	Ширина 900 км	Ширина 300 км	Ширина 900 км	Ширина 300 км	Ширина 900 км
1	5	1ч 21 мин 16 с	3 ч 56 мин 27 с	0 ч 48 мин 15 с	2 ч 29 мин 0 с	0 ч 34 мин 51 с	1 ч 42 мин 14 с
1,5	13,75	1ч 30 мин 31 с	4 ч 28 мин 01 с	1 ч 03 мин 42 с	2 ч 59 мин 05 с	0 ч 48 мин 21 с	2 ч 24 мин 36 с
2	22	2 ч 09 мин 50 с	5 ч 00 мин 30 с	2 ч 03 мин 11 с	3 ч 32 мин 32 с	1ч 41 мин 11 с	4 ч 12 мин 45 с

В таблице 2 приведены результаты численных расчетов для бассейнов имеющих одинаковые максимальную глубину 2 км и ширину 300 км, второй бассейн имеет стенку высота которой h_0=5м для профилей дна вида (10) и (13) при γ, изменяющихся от 1 до 2.

Показано, что наличие стенки высотой 5 м слабо влияет на величину периодов для бассейнов шириной 300 и 900 км.

В работе проверяется, как отразится на временных периодах изменение максимальной глубины бассейна. Для этого рассчитаны по методу Рунге-Кутта значения периодов для двух бассейнов, имеющих одинаковую ширину – 300 км, и разную максимальную глубину соответственно 1, 2 и 3 км. Профиль дна бассейнов изменяется по закону (8). Бассейны не имеют вертикальных стенок на границах, так как показано их слабое влияние на периоды волн.

Таблица 2. – Значения периодов свободных колебаний для профилей дна вида (9) и (10) для бассейнов ширины 300 км.

Профиль дна, (γ)	Длина шельфа, (км)	Первая мода		Вторая мода		Третья мода	
		Без стенки	Со стенкой	Без стенки	Со стен-кой	Без стенки	Со стенкой
параболический		1ч. 52мин. 08с.	1ч. 52мин. 08с.	0ч. 45мин. 46с.	0ч. 45мин. 48с.	3ч. 51мин. 14с.	3ч. 51мин. 15с.
1	5	1ч 21 мин 16 с.	1ч 21 мин 16 с.	0 ч 48 мин 15 с.	0 ч 48 ин 15 с.	0 ч 34 мин 51 с.	0 ч 34 мин 51 с.
1,5	13,75	1ч 30 мин 31 с.	1ч 30 мин 31 с.	1 ч 03 мин 42 с.	1 ч 03 мин 42 с.	0 ч 48 мин 21 с.	0 ч 48 мин 21 с.
2	22	2 ч 09 мин 50 с.	2 ч 04 мин 50 с.	2 ч 03 мин 11 с.	1 ч 54мин 32 с.	1ч 41 мин 11 с.	1ч 30 мин 56 с.

Результаты расчетов показали, что глубина бассейна оказывает существенное влияние на изменение периодов свободных колебаний для всех трех мод, а именно при увеличении глубины значения периодов уменьшается.

Выводы. С увеличением ширины бассейна сохраняются (качественно) зависимости периодов свободных колебаний от номера моды и длины шельфа, а величины самих периодов существенно возрастают.

При неизменных ширине и максимальной глубине бассейна периоды сейш первых трех мод увеличиваются с ростом длины шельфовой зоны.

С увеличением глубины бассейна величины самих периодов уменьшаются.

Наличие вертикальной стенки на границах бассейна, высотой 5 м, не влияет на изменение величины временных периодов.

ЛИТЕРАТУРА

1.Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. – Москва: Наука, 1977. – 815 с.

2.Ламб Г. Гидродинамика. – Москва: Гостехиздат, 1947. – 948 с.

3.Кочин Н. Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – Москва: Гостехиздат,1955.- Т.1. – 560 с.

4.Ле Блон П., Майс. Л. Волны в океане. – Москва: Мир, 1981. – Т.1. – 680 с.

5.Черкесов Л.В. Основы динамики несжимаемой жидкости/ Л.В Черкесов. – К: Наукова думка, 1984. – С. 164с.

6.Демидович Б.П., Марон И.А. – Москва.: Гос. изд-во физико-математической литературы, «Наука», 1963 – 512с.

7.Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений/ В.Э Милн – М. ИЛ, 1955 - 138с.