НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

А.А. Букатов

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

На основе уравнений динамики нелинейных волн методом многомасштабных асимптотических разложений с учетом кривизны волнового профиля при определении скорости поверхностных горизонтальных волновых течений получены уравнения для трех нелинейных приближений капиллярно-гравитационных волн на поверхности слоя однородной жидкости постоянной глубины. Найдены выражения, характеризующие структуру волнового профиля с точностью до величин третьего порядка малости вне малых окрестностей резонансных значений волновых чисел.

Введение. В линейной постановке влияние поверхностного натяжения на волновые процессы в однородной жидкости рассмотрено в [1, 2, 3]. Исследование капиллярно-гравитационных поверхностных периодических бегущих волн конечной амплитуды выполнено в [4] без оценки изменений амплитудно-фазовых характеристик, обусловленных зависимостью потенциала скорости движения жидких частиц на свободной поверхности от ее пространственно-временных деформаций. В настоящей работе методом многих масштабов рассмотрены капиллярно-гравитационные волны с учетом деформаций волнового профиля в выражении потенциала скорости на границе жидкость-воздух.

Постановка задачи. Рассмотрим влияние поверхностного натяжения на распространение периодических волн конечной амплитуды в однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины H. В предположении потенциальности движения жидкости в безразмерных переменных $x = kx_1$, $z = kz_1$, $t = \sqrt{kg}\,t_1$, где k волновое число, задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,\ -\infty < x < \infty,\ -H < z < \zeta \qquad (1)$$

с граничными условиями на поверхности ($z = \zeta$)

$$\zeta - \frac{1}{g}\varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_x^2 + \varphi_z^2\right) - \alpha_1 k^2 \zeta_{xx}\left(1 + \zeta_x^2\right)^{-3/2} = 0 \qquad (2)$$

и на дне бассейна ($z = -H$)

$$\varphi_z = 0. \qquad (3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x),\ \zeta_t = 0. \qquad (4)$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha/(\rho g)$, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, α – коэффициент поверхностного натяжения. Потенциал скорости φ и возвышение поверхности бассейна ζ связаны кинематическим условием (при $z = \zeta$)

$$\zeta_t - \zeta_x\varphi_x + \varphi_z = 0. \qquad (5)$$

Вывод основных уравнений. Решение задачи (1) – (5) найдем методом многих масштабов [5]. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, где ε – малое, но конечное и предположим справедливость выражений

$$\zeta = \varepsilon\zeta_0(x,t),\ \varphi = \varepsilon\varphi(x,z,t),\ f = \varepsilon f_0(x), \qquad (6)$$

$$\zeta_0 = \zeta_1 + \varepsilon\zeta_2 + \varepsilon^2\zeta_3 + O(\varepsilon^3),$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_3 + O(\varepsilon^3)$$

$$f_0 = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3).$$

Подставив φ из (6) в (1) и (3), с точностью до величин третьего порядка малости получим

$$\varepsilon\Delta\varphi_1 + \varepsilon^2\Delta\varphi_2 + \varepsilon^3\Delta\varphi_3 = 0,$$

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \varepsilon^3\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = 0. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь динамическое (2), кинематическое (5) и начальное (4) условия. В силу малости ε представим потенциал скорости $\varphi(k, z, t)$ на поверхности жидкости $z = \varepsilon\zeta_0$ в виде

$$\varphi(x,t,\varepsilon\zeta_0) = \varphi(x,t,0) + \varepsilon\zeta_0\varphi_z(x,t,0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta_0^2\varphi_{zz}(x,t,0) + \ldots \qquad (8)$$

Подставим $\zeta = \varepsilon\zeta_0$, $f = \varepsilon f_0$, $\varphi(x, t, \varepsilon\zeta_0)$ в условия (2), (3), (4), (5), имея в виду при этом, что по правилу дифференцирования сложной функции частная производная по времени определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial\cdot}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$$

и учитывая зависимость ζ_0 от x и t в (8). Тогда собрав коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравняв их нулю из (2) – (5), (7) найдем

$$\Delta\varphi_n = 0,\ -\infty < x < \infty,\ -H < z < 0, \qquad (9)$$

$$\zeta_n - \frac{\partial\varphi_n}{\partial T_0} - \alpha_1 k^2 \frac{\partial^2\zeta_n}{\partial x^2} = F_n^*,\ z = 0, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0} + \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} = L_n^*,\ z = 0, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial z} = 0,\ z = -H, \qquad (12)$$

$$\zeta_n = f_n(x),\ \frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0} = G_n,\ t = 0. \qquad (13)$$

Здесь

$$F_n^* = F_n + F_n^0,\ L_n^* = L_n + L_n^0,$$

$$F_1 = F_1^0 = L_1 = L_1^0 = L_2^0 = G_1 = 0,$$

$$F_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$L_2 = \frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1} - \zeta_1 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2},\ G_2 = -\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1},$$

$$G_3 = -\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1} - \frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1},$$

$$F_3 = \zeta_1\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \zeta_2 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{1}{2}\zeta_1^2 \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} - \frac{3}{2}\alpha_1 k^2 \frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2,$$

$$L_3 = \frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x \partial z}\right) - \zeta_1 \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} - \zeta_2 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1} - \frac{1}{2}\zeta_1^2 \frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^3},$$

$$F_2^0 = \frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z},\ L_3^0 = -\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z},$$

$$F_3^0 = \frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \zeta_1 \frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}.$$

Отметим, что слагаемые F_2^0, F_3^0, L_3^0, входящие в правые части уравнений (10), (11), обусловлены учетом зависимости ζ_0 от x и t в (8) при выводе поверхностных граничных условий для нелинейных приближений [6]. Что касается выражений $F_{2,3}$, $L_{2,3}$, $G_{2,3}$, то они аналогичны полученным в [4]. Из (10), (11) видно, что зависимость ζ_0 от x и t в (8) не проявляется в выражениях для приближения порядка ε ($F_1^0 = L_1^0 = 0$). В приближениях же ε^2 такое слагаемое (F_2^0) входит только в динамическое, а в приближении ε^3 – в динамическое (F_3^0) и кинематическое (L_3^0) условия.

Остановимся на рассмотрении бегущих периодических волн, задавая $f_n(x)$ в соответствующем виде. В таком случае выберем первое приближение ($n = 1$) возвышения поверхности бассейна ζ_1 в форме

$$\zeta_1 = \cos\theta,\ \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2). \qquad (14)$$

Тогда из кинематического условия (11) находим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \tau\sin\theta,\ z = 0.$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (12) на дне бассейна, запишем φ_1 в форме

$$\varphi_1 = b_0 \cosh(z + H)\sin\theta. \qquad (16)$$

После подстановки (16) в (15) получим $b_0 = \tau(\sinh H)^{-1}$. В результате

$$\varphi_1 = b_1 \sin\theta,\ b_1 = \tau(\sinh H)^{-1}\cosh(z + H) \qquad (17)$$

Подставляя (14) и (17) в динамическое условие (10), найдем дисперсионное соотношение

$$\tau^2 = \left(1 + \alpha_1 k^2 \tanh H\right).$$

Выражение, определяющее $\beta(T_1, T_2)$ в (14), получим из последующих приближений. Чтобы найти второе приближение (решение задачи при $n = 2$), определим правые части уравнений (10), (11), используя (14), (17). Тогда с учетом требования отсутствия основной гармоники получим

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta,\ \varphi_2 = b_2 \cosh 2(z + H)\sin 2\theta + \varphi_2^*, \qquad (19)$$

где

$$a_2 = \tau^2\left[\left(1 + 4\alpha_1 k^2\right)\tanh 2H - 2\tau^2\right]^{-1}\mu_2,$$

$$b_2 = \left(a_2 - \frac{1}{2}\coth H\right)\tau\cosh 2(z + H)\sinh^{-1} 2H,$$

$$\mu_2 = \tanh 2H - \coth H - \frac{1}{4}\tanh 2H\left(\coth^2 H - 1\right),$$

$$\varphi_2^* = \frac{1}{4}\tau^2\left(\coth^2 H + 1\right)T_0.$$

При этом оказывается, что θ не зависит от T_1. Поэтому $\beta = \beta_2(T_2)$. Полученные решения для первого (14), (17) и второго (19) приближений определяют правые части динамического (10) и кинематического (11) условий задачи для третьего приближения ($n = 3$). Ис-

ключив в них слагаемые, порождающие секулярность для ζ_3, φ_3 найдем

$$\zeta_3 = a_3 \cos 3\theta, \varphi_3 = b_3 \sin 3\theta + \varphi_3^*, \ \beta = \tau\sigma_0 T_2.$$

Здесь

$$a_3 = \tau^2 \left[\left(1 + 9\alpha_1 k^2\right)\tanh 3H - 3\tau^2\right]^{-1} \cdot \left(l_4 \tanh 3H - l_6\right),$$

$$b_3 = \tau\left(a_3 - \frac{1}{3} l_6\right) \cosh 3(z+H) \sinh^{-1} 3H,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\left(l_5 - l_3 \tanh H\right),$$

$$\varphi_3^* = \tau\left[\frac{1}{2}\left(l_5 - l_3 \tanh H\right) - l_5\right] \cdot \cosh(z+H) \sinh^{-1} H \sin\theta,$$

$$l_3 = \frac{3}{8}\alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \frac{1}{2}\coth H\left(\coth H \coth 2H - \frac{5}{4}\right) - a_2\left(\frac{1}{2} + \coth H \coth 2H\right),$$

$$l_4 = -\frac{3}{8}\alpha_1 k^2 \tau^{-2} + \frac{1}{2}\coth H\left(\coth H \coth 2H - \frac{15}{4}\right) + a_2\left(\frac{11}{2} - \coth H \coth 2H\right),$$

$$l_5 = l_2 + \frac{9}{8}, \ l_6 = 3l_2 + \frac{1}{8},$$

$$l_2 = \frac{1}{2}\left[a_2\left(\coth H + 2\coth 2H\right) - \coth H \coth 2H\right].$$

Следовательно, возвышение поверхности бассейна ζ и потенциал скорости движения жидкости φ до величин третьего порядка малости определяется из выражений

$$\zeta = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n a_n \cos n\theta, \ \varphi = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \left(b_n \sin n\theta + \varphi_n^*\right), \quad (20)$$

$$\theta = x + \sigma t, \ \sigma = \tau\left(1 + \varepsilon^2 \sigma_0\right), \ a_1 = 1, \ \varphi_1^* = 0.$$

Отметим, что полученное решение (20) справедливо вне малых окрестностей резонансных значений волновых чисел k_2 и k_3, удовлетворяющих уравнению

$$\left(1 + n^2 \alpha_1 k^2\right)\tanh nH - n\tau^2 = 0$$

при $n = 2$ и $n = 3$ соответственно.

Для получения решения вблизи резонансного значения k_2 можно [4] представить волновое число в виде

$$k = k_2 + \varepsilon\lambda, \ \ \lambda = O(1)$$

и записать первое приближение ($n = 1$) возвышения поверхности (14) в форме

$$\zeta_1 = \cos\theta + a_0 \cos\theta,$$

где a_0 – постоянная величина порядка единицы. В этом случае выражения F_2 и F_3 в (10) приобретут дополнительные слагаемые

$$2\alpha_1 \lambda k_2 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}$$

и

$$2\alpha_1 \lambda k_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2} + \alpha_1 \lambda^2 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}$$

соответственно.

Заключение. Из полученных выражений следует, что пренебрежение кривизной волнового профиля в выражении потенциала скорости при выводе кинематического и динамического поверхностных граничных условий для нелинейных приближений может привести к изменениям пространственного распределения вертикальных смещений поверхности жидкости, формируемых капиллярно-гравитационными волнами конечной амплитуды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.;Л.: ОНТИ, 1936. – 304с.
2. Федосенко В.С. Неустановившиеся капиллярно-гравитационные корабельные волны // Морские гидрофизические исследования. – 1970. – №3(49). – С.78–91.
3. Murray J.C. On the linear capillary-gravity waves problem // Acta mechanics. – 1975. – 23, №3. – P.229–238
4. Nayfey A.N. Finite amplitude surface waves in a liquid layer // J. of Fluid Mechanics. – 1970. – 40, №4. – P.671–684.
5. Найфе А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455с.
6. Букатов А.Е., Букатов А.А. Нелинейные поверхностные волны в бассейне с плавающим битым льдом // Морской гидрофизический журнал. – 2002. – №5. – С.34–46.