

# ВЛИЯНИЕ ЛЕДОВОГО СЖАТИЯ НА СТОЯЧИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЗАМЕРЗАЮЩЕМ БАССЕЙНЕ

А.Е. Букатов, О.М. Букатова

Морской гидрофизический институт  
НАН Украины  
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2  
E-mail: [ocean@alpha.mhi.inp.net](mailto:ocean@alpha.mhi.inp.net)

*Изучаются плоские изгибно-гравитационные волны малой амплитуды в покрытом сплошным упругим льдом ограниченном бассейне конечной глубины. Выполнен анализ влияния ледового сжатия (растяжения) на волновые характеристики.*

**Введение.** Характерным природным фактором морей полярных и умеренных широт является наличие ледяного покрова. Практически все реки, водохранилища, озера и даже моря Украины также полностью или частично покрываются льдом в зимний сезон. Это затрудняет, а в ряде случаев и исключает осуществление контроля за динамическим, а следовательно, и экологическим состоянием вод традиционными методами на протяжении длительного промежутка времени года. Это обстоятельство дает основание считать целесообразным теоретическое моделирование волновых возмущений в замерзающих бассейнах с целью оценки влияния ледовых условий на волновые характеристики, позволяющие прогнозировать динамические процессы под ледяным покровом. Для прогрессивных волн такая задача решалась в [1, 2]. Для стоячих волн аналогичные исследования проводились в [3] без учета сил ледового сжатия (растяжения). В настоящей работе изучается влияние сжимающих (растягивающих) усилий на плоские изгибно-гравитационные стоячие волны малой амплитуды в покрытом сплошным упругим льдом бассейне постоянной глубины.

**Постановка задачи.** Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей прямоугольный бассейн глубины  $H = \text{const}$ , плавает ледяной покров. Рассмотрим влияние ледового сжатия на плоские сейшевые колебания жидкости. Выберем начало координат на невозмущенной поверхности лед-вода, совместив с ней ось  $x$ . Ось  $z$  направим вертикально вверх вдоль левой стенки ( $x = 0$ ) бассейна. Моделируя ледяной покров тонкой упругой продольно сжа-

той (растянутой) пластинкой [1] и предполагая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластинки малыми, для определения потенциала скорости  $\varphi(x, z, t)$  получим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad -H \leq z \leq 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности ( $z = 0$ )

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - (-1)^j Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

и на дне ( $z = -H$ ) бассейна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

На боковых стенках бассейна ( $x = 0, x = l$ ), как и на дне должно выполняться условие непротекания

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

При этом  $\zeta$  и  $\varphi$  связаны кинематическим соотношением

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad z = 0 \quad (5)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \kappa_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$E, h, \rho_1, \nu$  – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда,  $\zeta$  – прогиб льда или возвышение поверхности лед-вода,  $Q > 0$  – сжимающее ( $j = 1$ ) или растягивающее ( $j = 2$ ) усилие,  $\rho$  – плотность воды,  $l$  – ширина бассейна.

**Вывод основных уравнений.** Чтобы получить стоячие колебания, рассмотрим потенциал скорости  $\varphi$  в виде

$$\varphi(x, z, t) = \frac{a\sigma}{k} \varphi(x, z) \cos \sigma t,$$

где  $a$  амплитуда колебаний (вертикальное смещение поверхности лед-вода),  $k$  – волновое число,  $\sigma$  – частота колебаний. Для удовлетворения уравнения (1) и граничных условий (3) на дне и (4) на стенках бассейна предположим, что зависимость  $\varphi$  от  $x$  и  $z$  определяется соотношением  $\varphi = \cos kx \cdot \text{ch} k(z + H)$ ,  $k = \pi n/l$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (6)  
Следовательно

$$\varphi(x, z, t) = \frac{a\sigma}{k} \cos kx \operatorname{ch} k(z+H) \cos \sigma t, \quad (7)$$

$$k = \frac{\pi n}{l}, n = 1, 2, \dots$$

Тогда для стоячих колебаний ( $k = \pi n/l$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) составляющие скорости частиц жидкости  $u$  и  $w$  соответственно вдоль осей  $x$  и  $z$  найдем по формулам

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -a\sigma \sin kx \operatorname{ch} k(z+H) \cos \sigma t$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = a\sigma \cos kx \operatorname{sh} k(z+H) \cos \sigma t \quad (8)$$

Полная скорость движения частиц жидкости определяется выражением

$$v = a\sigma \sqrt{\sin^2 kx + \operatorname{sh}^2 k(z+H)} \cos \sigma t \quad (9)$$

Подставляя  $\varphi$  из (7) в кинематическое соотношение (5), получим выражение для возвышения поверхности бассейна в виде

$$\zeta = a \cos kx \operatorname{sh} kH \sin \sigma t \quad (10)$$

Из динамического условия (2) с учетом (7) и (9) найдем выражение, связывающее волновое число и частоту колебаний

$$\sigma = \sigma_0 \sigma_1, \quad \sigma_0 = (kg \operatorname{th} kH)^{1/2}, \quad (11)$$

$$\sigma_1 = \left[ \frac{1 - (-1)^j Q_1 k^2 + D_1 k^4}{1 + \kappa_1 \sigma_0^2} \right]^{1/2},$$

где  $\sigma_0$  представляет частоту колебаний при отсутствии льда, а величина  $\sigma_1$  характеризует влияние сил упругости ( $E \neq 0$ ), продольного сжатия ( $j = 1, Q \neq 0$ ) или растяжения ( $j = 2, Q \neq 0$ ) и инерции ( $h \neq 0$ ) льда. Видно, что цилиндрическая жесткость льда и продольное растяжение увеличивают, а инерция льда и продольное сжатие уменьшают значение  $\sigma_1$ . При отсутствии льда  $\sigma_1 = 1$ . Величина  $\sigma_1$  может равняться единице и при наличии льда, если

$$D_1 k^3 + (-1)^j Q_1 k - \kappa_1 g \operatorname{th} kH = 0 \quad (12)$$

При таком условии равновесие ледяной пластинки достигается за счет ее внутренних сил упругости [3], а частота колебаний жидкости остается такой же, как и в бассейне с открытой поверхностью. Отметим, что при ледовом сжатии необходимым условием устойчивости сплошной плавающей упругой пластинки является неравенство  $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать положительные величины  $Q_1$ , удовлетворяющие этому неравенству. В случае продольного растяжения упругая ледяная пластинка устойчива при любых значениях рас-

тягивающих усилий, не приводящих к разрыву ее сплошности.

Для мелкой воды ( $kH \ll 1$ ) из условия (12) найдем

$$k = \left[ \frac{\kappa_1}{D_1} gH - (-1)^j \frac{Q_1}{D_1} \right]^{1/2} \quad (13)$$

Видно, что в приближении мелкой воды при ледовом сжатии ( $j = 1, Q \neq 0$ ) всегда существует действительное значение волнового числа (13), для которого выполняется условие (12). При растягивающих усилиях ( $j = 2, Q \neq 0$ ) значение  $k$ , определяемое по формуле (13), будет действительным только при  $Q_1 < \kappa_1 gH$ .

Для глубокой воды ( $kH \gg 1$ ) в условиях продольного растяжения  $\sigma_1$  равняется единице при значении волнового числа

$$k = A + B$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{\kappa_1 g}{2D_1} (1 + \sqrt{F})}, B = \sqrt[3]{\frac{\kappa_1 g}{2D_1} (1 - \sqrt{F})}, \quad (14)$$

где

$$F = 1 + \frac{4}{27} \frac{Q_1^3}{D_1 (\kappa_1 g)^2}$$

При ледовом сжатии

$$F = 1 - \frac{4}{27} \frac{Q_1^3}{D_1 (\kappa_1 g)^2}$$

и формулы (14) определяют действительное значение  $k$  при условии  $27D_1 (\kappa_1 g)^2 \geq 4Q_1^3$ . Если же  $27D_1 (\kappa_1 g)^2 < 4Q_1^3$ , то действительное значение волнового числа  $k$ , удовлетворяющее уравнению (12) при  $kH \gg 1, j = 2$ , определим из выражения [4]

$$k = 2\sqrt[3]{Q_1 / (3D_1)} \cos(\alpha/3),$$

где

$$\cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{\kappa_1 g}{Q_1} \sqrt{3D_1 / Q_1}$$

Анализ результатов. Для количественной оценки влияния сил ледового сжатия (растяжения) на волновые характеристики проводились численные расчеты величины  $\sigma_1$  и распределений амплитудных по времени значений полной скорости

$$V = a\sigma \sqrt{\sin^2 kx + \operatorname{sh}^2 kH} \quad (15)$$

и ее составляющих

$$U = a\sigma \sin kx \operatorname{ch} kH, W = a\sigma \cos kx \operatorname{sh} kH \quad (16)$$

у поверхности лед-вода ( $z = 0$ ) по ширине бассейна ( $0 \leq x \leq l$ ) для

$$E=3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \rho_1/\rho = 0.87, 0 \leq h \leq 2 \text{ м},$$

$$H = 100 \text{ м}, l = 250 \text{ м}, a = 0.1 \text{ м}.$$

Величина  $Q_1$  принималась равной 0;  $\sqrt{D_1}$ ;  $1.5\sqrt{D_1}$ ;  $2\sqrt{D_1}$ . На рис. 1, 2, 3 представлены результаты расчетов при  $h = 0.5 \text{ м}$  для одноузловых ( $n = 1$ ) колебаний. Жирные сплошные линии на этих рисунках получены при отсутствии сжимающих (растягивающих) усилий ( $Q = 0$ ), а тонкие сплошные и штриховые при ледовом сжатии и растяжении соответственно. Причем штриховые линии по порядку снизу вверх, а тонкие сплошные по порядку сверху вниз отвечают на рис. 1, 3 значениям  $Q_1$ , равным  $\sqrt{D_1}$ ;  $1.5\sqrt{D_1}$ ;  $2\sqrt{D_1}$ . В аналогичном (противоположном) порядке при изменении  $Q_1$  располагаются соответствующие линии у гребней (впадин) распределений  $U, W$  по ширине бассейна.

Из графиков на рис. 1, иллюстрирующих зависимость величины  $\sigma_1$  от ширины бассейна  $l$  и сжимающих (растягивающих) усилий, видно, что при фиксированной глубине бассейна влияние ледяного покрова при  $Q_1 = 0$  и в условиях продольного растяжения убывает с ростом  $l$ . Увеличение растягивающих усилий приводит к росту  $\sigma_1$  для заданных  $l$  и  $H$ . Ледовое сжатие уменьшает значение  $\sigma_1$ . Однако характер поведения функции  $\sigma_1(l)$  зависит от величины сжимающего усилия. Если сжимающее усилие  $Q_1$  превышает величину  $Q_0$ , то  $\sigma(l)$  имеет минимум, значение которого убывает с ростом  $Q_1$  и равно нулю при  $Q_1 = 2\sqrt{D_1}$ . Величина  $Q_0$  определяется [5] по формуле

$$Q_0 = \tau_0(k_0),$$

$$\tau_0 = \left[ (1 + D_1 k^4) \tau_1(k) + 4D_1 k^4 \tau_2(k) \right] \cdot [\tau_1(k) + 2\tau_2(k)]^{-1} k^{-2},$$

$$\tau_1(k) = thkH + kH ch^2 kH,$$

$$\tau_2(k) = (1 + \kappa_1 kg thkH) thkH,$$

где  $k_0$  единственный положительный корень уравнения  $\tau'_0(k) = 0$ . Значение  $l = l_0$ , удовлетворяющее уравнению  $\sigma_1(l_0) = 0$ , определяется по формуле  $l_0 = \pi \sqrt[4]{D_1}$ . Отсюда следует, что  $l_0$  растет с увеличением узлов ( $n$ ) сей-

шевых колебаний. Распределение амплитудных значений составляющих скорости (16) и полной скорости (15) сейшевых колебаний иллюстрируют графики на рис. 2, 3 для одноузловой сейши. Видно, что сжатие уменьшает, а растяжение увеличивает экстремальные (у гребней и впадин) амплитудные значения составляющих скорости  $U, W$  и амплитуду  $V$  полной скорости стоячих колебаний. Отметим, что это влияние усиливается с ростом номера сейшевой моды и толщины ледяного покрова.

Графики зависимости экстремальных значений (в вершинах гребней)  $U$  и  $W$  одноузловой сейши от толщины  $h$  при заданных значениях  $Q_1$  приведены на рис. 4, где сплошные жирные, сплошные тонкие и штриховые линии отвечают тем же величинам сжимающих и растягивающих усилий, что и на рис. 1, 3. Представленные зависимости показывают усиление влияния сжимающих (растягивающих) усилий на  $U, W$ , а следовательно и на  $V$ , с ростом толщины льда.

Для двухузловой сейши аналогичные распределения экстремальных значений составляющих скорости  $U$  и  $W$  при рассматриваемых значениях исходных параметров практически совпадают между собой. Влияние толщины льда растет с увеличением номера сейшевой моды.

**Заключение.** Частота сейшевых колебаний жидкости в покрытом сплошным упругим льдом бассейне постоянной глубины большая, чем в бассейне с открытой поверхностью. Влияние льда на частоту колебаний усиливается с ростом номера сейшевой моды и убывает с увеличением ширины бассейна.

Увеличение растягивающих усилий приводит к росту, а ледовое сжатие к уменьшению частоты сейшевых колебаний. При соответствующем соотношении цилиндрической жесткости льда и ширины бассейна частота колебаний фиксированной сейшевой моды может обращаться в нуль.

Ледовое сжатие уменьшает, а растяжение увеличивает экстремальные амплитудные значения составляющих скорости и амплитуду полной скорости стоячих колебаний жидкости. Это влияние усиливается с ростом номера сейшевой моды и толщины ледяного покрова.

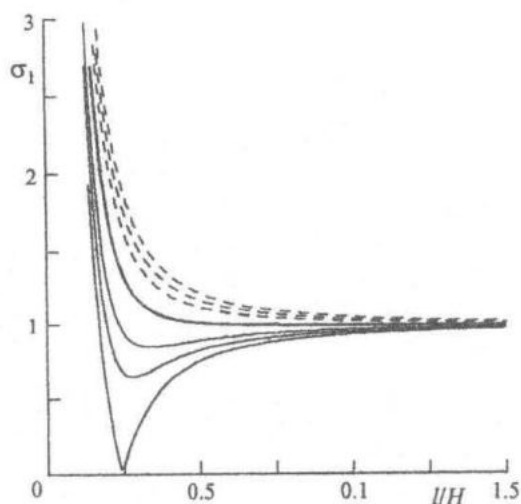


Рис. 1 – Зависимость  $\sigma_1$  от ширины бассейна и сжимающих (растягивающих) усилий.

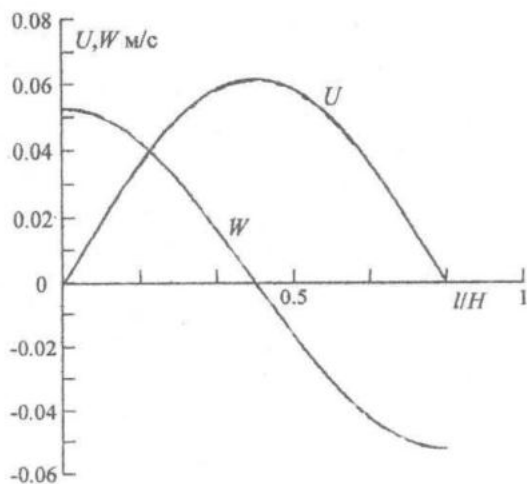


Рис. 2 – Распределение амплитудных значений составляющих скорости колебаний частиц жидкости по ширине бассейна.

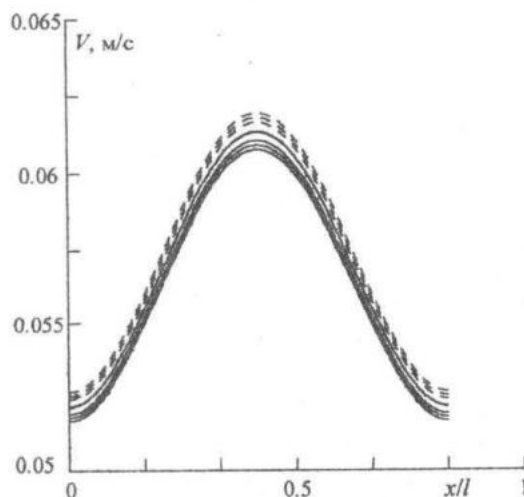


Рис. 3 – Распределение амплитуды полной скорости движения частиц жидкости по ширине бассейна.

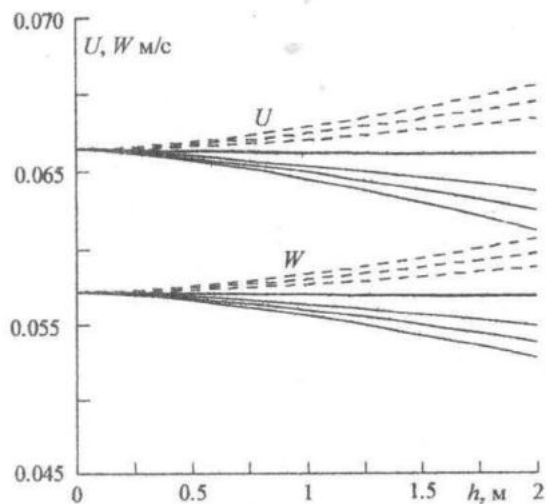


Рис. 4 – Зависимость экстремальных значений амплитуд составляющих скорости колебаний жидких частиц от толщины льда и сжимающих (растягивающих) усилий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. – Л.: Гидрометеиздат, 1967. – 215с.
2. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на волновые движения жидкости // Морские гидрофизические исследования. -1971.-N:2(52). –С. 113-144
3. Букатова О.М. Влияние ледяного покрова на стоячие волны в бассейне конечной глубины // Системы контроля окружающей

среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2002. – С.421-424.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. -М.: Наука. 1984. – 832 с.

5. Букатов А.Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся волновое движение однородной жидкости // Изв. РАН. МЖГ.1980.N5. – С. 68-75.