

# ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ СИЛЬНО НЕЛИНЕЕНЫХ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ В ОКЕАНЕ

A.H. Сердюченко

Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова  
г. Nikolaev, пр. Героев Сталинграда, 9  
E-mail: san@nk.ukrnet.net

*Рассмотрен приближенный подход к исследованию крутых ветровых волн в океане, которые испытывают укручивание, опрокидывание и частичное обрушение гребней. Приближение основано на анализе серий волновых профилей крутых ветровых волн и последующей модификации и полуобратном решении нелинейной краевой задачи для таких волн. Рассмотрены закономерности в волновом профиле и поле скоростей частиц жидкости на свободной волновой поверхности.*

**Введение.** Укручивание, опрокидывание и обрушение гребней крутых ветровых волн в условиях достаточно интенсивного волнения в океане является массовым и хорошо известным природным явлением. Исследование этого явления представляет значительный интерес для океанологии при изучении диссиpации энергии волн в моделях ветро-волновых взаимодействий [1], для судостроения при исследовании остойчивости малых судов и оценке продольной прочности крупнотоннажных судов при действии крутых ветровых волн, для прибрежной гидротехники и др..

К сожалению, теоретическое исследование крутых ветровых волн сталкивается со значительными трудностями, поскольку явление носит сильно нелинейный неста-ционарный характер. При опрокидывании гребня сначала появляется Эйлерова многозначность профиля, далее при касании гребня переднего склона волны добавляется Лагранжева многозначность поля скоростей частиц жидкости и на заключительной стадии при разрушении гребня возникает сильно турбулизованный поверхностный слой воды, насыщенный воздухом.

Существенный прорыв в исследованиях таких волн произошел примерно в конце 70-х годов прошлого столетия, в основном благодаря серии работ М.Лонге-Хиггенса [11-16]. Причем серьезные результаты удалось получить в основном численными методами [9,12,18,19], в частности, методом граничных элементов (МГЭ) [9,18,19]; результаты анали-

тических исследований имели более скромный характер упрощенных оценок и отдельных асимптотик [14-16]. Однако, по меньшей мере, один результат – открытый М.Лонге-Хиггенсом механизм супергармонической неустойчивости волнового профиля (фактически гребня волны) имел фундаментальный характер [11,13]. В то же время и методы МГЭ позволяют численно просчитать гидродинамику движения опрокидывающейся волны только до момента касания гребнем переднего склона волны, когда появляется Лагранжева многозначность, так что дальнейшие исследования в области сильно нелинейных волновых движений на воде продолжают оставаться актуальными.

**Цель данной работы** состоит в поиске предпосылок и разработке альтернативных методов исследования крутых ветровых волн, возможно менее точных в сравнении с МГЭ, но пригодных для описания гидродинамики таких волн на всех стадиях их эволюции во времени.

**1. Основные допущения.** На этом пути, если ориентироваться на разработку приближенных моделей крутых ветровых волн в задачах океанотехники и судостроения, существенные упрощения можно получить, если пренебречь локальным эффектом опрокидывания верхней части гребня волны, а также возникновением турбулизованного потока жидкости на переднем склоне волны после частичного разрушения гребня. Тогда, как показали исследования [4,5], волновой профиль может быть описан рядами Фурье по кратным связанным гармоникам, индуцированными нелинейными эффектами.

Следующее допущение связано с тем, что крупномасштабные ветровые волны движутся в составе групп волн, более регулярных, чем волнение в целом, и это позволяет использовать многомасштабные пространственно-временные структуры решений [3,6] при рассмотрении соответствующих краевых задач теории волн.

Наконец, будем исходить из предпосылки, что в сильно нелинейной краевой задаче приближенные решения можно получить в рамках метода полуобратной задачи, когда некоторая часть решения или его структуры задается, а стальная часть решения ищется затем прямым методом из краевой задачи.

Рассмотрим теперь более детально основные соотношения в рамках очерченной направленности работы. Решение разбивается на несколько этапов: 1) определение волнового профиля, 2) модификация граничных условий краевой задачи, 3) определение поверхностных скоростей и 4) расчет скоростей и давлений во всей жидкости.

2. Фурье-анализ волнового профиля. Рассмотрение крутых ветровых волн полезно начать с результатов Фурье-анализа серий волновых профилей индивидуальных волн, полученных в литературе численно [12,18,19] или экспериментально [8] на различных стадиях укручивания и опрокидывания гребней, а в экспериментах - и их обрушения. Было обработано три серии волновых профилей от 10 до 30 примеров в серии, а также отдельные примеры волн на различных стадиях их эволюции, рис. 1.

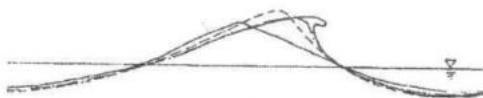


Рис 1- Волновые профили по данным [12].

Волновой профиль представлялся рядом Фурье по кратным гармоникам

$$\zeta_w = a_w \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\theta + \alpha_n), \quad (1)$$

где  $a_w$  - размерный множитель - амплитуда (полувысота) волны;  $a_n, \alpha_n$  - амплитуды и фазы кратных равновесных гармоник, индуцированные нелинейностью;  $\theta$  - фазовая координата;  $N \approx 20 - 25$ .

При этом амплитуды  $a_n$  заданы в виде

$$a_n = \tilde{a}_n \delta_w^{n-1}, \quad \delta_w = ka_w; \quad n = 1 \dots N, \quad (2)$$

где коэффициенты амплитуд  $\tilde{a}_n$  также зависят от крутизны волнового склона  $\delta_w$  в старших порядках и, кроме того, при  $n > 4$  удобнее оперировать логарифмами  $\tilde{l}_n = \ln \tilde{a}_n$ .

Полученные результаты показали очень устойчивые зависимости величин  $\tilde{a}_n, \tilde{l}_n$  и  $\alpha_n$  от номера гармоники  $n$  и квадрата крутизны  $\delta_w$ , которые хорошо аппроксимируются квадратичными полиномами. Характерные примеры зависимости от номера гармоники показаны на рис.2 – 4.

В частности, фазы кратных гармоник в (1) линейно зависят от номера гармоники и эта

когерентность фаз как раз и формирует укрученный волновой профиль, характерный для ветровых волн. Причем степень укрученности профиля определяется фактически параметром наклона прямой  $\alpha_n(n)$ .

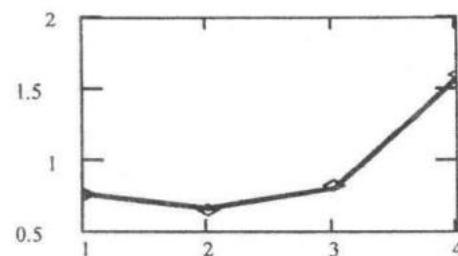


Рис 2- Типичная зависимость  $\alpha_n(n), n \leq 4$  и его аппроксимация (----)

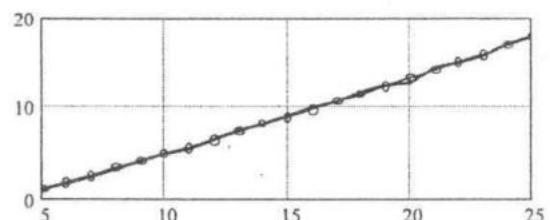


Рис 3- Типичная зависимость  $\tilde{l}_n(n), n > 4$  и его аппроксимация (o-o-o-o-o)

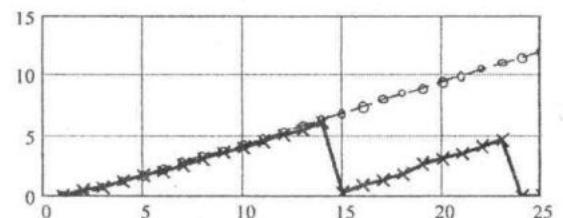


Рис 4- Типичная зависимость  $\alpha_n(n)$  и его аппроксимация (o-o-o-o-o)

В свою очередь зависимость  $\tilde{a}_n$  от квадрата крутизны  $\delta_w$  аппроксимируется выражением

$$\tilde{a}_n = v_n^0 \left[ 1 + v_n' \delta_w^2 \left( 1 - v_n'' \delta_w^2 \right) \right] + O(\delta_w^6), \quad (3)$$

где  $v_n^0$  - Стоксовские коэффициенты [4,7], а  $v_n', v_n''$  - коэффициенты аппроксимации.

Другой важный результат для укрученных волновых профилей – зависимость амплитуд и фаз кратных гармоник в (1) от

времени в процессе эволюции волны, которая как раз и связана с уже упомянутым выше механизмом супергармонической неустойчивости [11,13]. Согласно этому механизму, возмущение амплитуд и фаз в (1) относительно Стоксовских значений для стационарного решения приводит к возбуждению их неустойчивости и, соответственно, к эволюции волнового профиля. Такие возмущения можно получить, например, приложив на некоторое время к волне Стокса поверхностное давление, или взяв в начальный момент времени синусоидальную волну конечной амплитуды (для нее все  $a_n = 0$  при  $n > 1$ ). В обеих примерах, взятых из работы [13], действие механизма неустойчивости приводило к тому, что волны довольно быстро опрокидывались.

Наиболее полная серия экспериментальных профилей Бонмарина [8] показала результаты, которые качественно представлены на рис. 5. Серии волновых профилей, полученные теоретически, охватывают только первую часть временного отрезка до начала разрушения гребня волны.

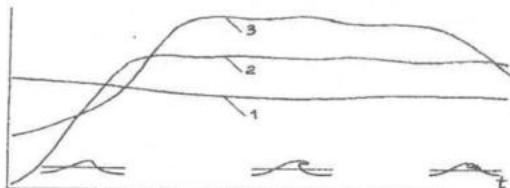


Рис 5- Типичная зависимость 1) амплитуды  $\tilde{a}_1$ , 2) фазы  $\alpha_n$  и 3) амплитуды  $\tilde{a}_n, n \gg 1$  от времени в процессе укручивания, опрокидывания и разрушения гребня волны

Как видно из рис. 5, в процессе эволюции энергия перекачивается из первой фундаментальной гармоники в высокочастотные гармоники, а фазы кратных гармоник достаточно быстро достигают некоторого уровня насыщения и затем мало меняются. При этом изменения в первой амплитуде имеют порядок  $O(\varepsilon)$ , ( $\varepsilon \ll 1$ ), в младших амплитудах - порядок  $O(1)$ , а в старших амплитудах -  $O(\varepsilon^{-1})$ , однако окончательный порядок изменения амплитуд определяется также малыми множителями  $\delta_w^{n-1}$  в (2), так что изменения  $\delta a_n \sim O(\varepsilon^{n-1-m})$ ,  $m > 1$ .

Зависимость величин  $a_n, \alpha_n$  от времени, в частности, показывает, почему применение ме-

тода многих масштабов [3] к данной задаче [6] не позволило получить решения, описывающие укрученные волны. Дело в том, что согласно этому методу величины  $a_n, \alpha_n$  должны зависеть только от медленных пространственно-временных переменных.

Таким образом, приведенные выше зависимости позволяют моделировать укрученные периодические волны. Добавив в амплитуды и фазы кратных гармоник зависимость от медленных координат [6]

$$\xi_g = \varepsilon(kx + \frac{1}{2}\sigma t), \eta_g = \varepsilon ky, \tau_d = \frac{1}{2}\varepsilon^2\sigma t, \quad (4)$$

можно рассматривать динамику укрученных волн и в составе групп волн, что уже ближе к реальным условиям волновых движений в штормовой области.

3. Поле скоростей на волновой поверхности. Ограничимся для краткости плоскими периодическими волнами. Тогда поверхностное поле скоростей ищется из следующих граничных условий нелинейной краевой задачи [7]

$$\begin{aligned} \zeta_{wt} + \zeta_{wx} v_x^s - v_z^s &= 0, \\ (\phi_t)^s + \frac{1}{2} \left( v_x^s{}^2 + v_z^s{}^2 \right) + g\zeta_w &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $v_{x,z}^s = (\phi_{x,z})^s$  - проекции скоростей и верхний индекс указывает на принадлежность величин к волновой поверхности.

Сначала предварительно модифицируем граничные условия (5), подходящим образом выразив производные по времени. Для плоских периодических волн можно записать зависимость  $\phi(x,t) = \phi(\theta, t_e)$ , где  $\theta = k(x + ct)$  - полная фаза волны (волны бегут навстречу оси  $Ox$ ) и  $t_e = \sigma t / \varepsilon$  - быстрое время эволюции амплитуд и фаз кратных гармоник в процессе укручивания волны. Тогда производная от потенциала скоростей запишется

$$\begin{aligned} \phi_t &= c\phi_x + \varepsilon^m \delta\phi, \quad m > 1 \quad (6) \\ \text{и } \delta\phi &= \sum_n \left( \phi_{a_n} a_{n t_e} + \phi_{\alpha_n} \alpha_{n t_e} \right) - \text{ некоторая поправка, связанная с эволюцией амплитуд и фаз кратных гармоник. В силу оговоренных выше оценок порядков ам-} \end{aligned}$$

плитуд кратных гармоник, поправка должна быть малой. Аналогично можно записать и для производной от волнового профиля  $\zeta_w$ .

Тогда в основном порядке условия (5) алгебраически замыкаются относительно проекций поверхностных скоростей  $v_x^s, v_z^s$  и эти величины легко получить в замкнутом виде (после нормировки  $\zeta_w$  на  $a_w$ , а

скоростей - на  $c_0 = \sqrt{g/k}$ )

$$\begin{aligned} v_x^s &= -\tilde{c}(1 - R_-/R_+), \\ v_z^s &= -\tilde{c}\zeta_{wx} \cdot R_-/R_+, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $R_- = \sqrt{1 - 2\tilde{c}^{-2}\delta_w\zeta_w}$ ,  $R_+ = \sqrt{1 + \zeta_{wx}^2}$  и  $\tilde{c} = c/c_0 = 1 + \frac{1}{2}\delta_w^2 + \frac{1}{8}\delta_w^4 + O(\delta_w^6)$  - нелинейная поправка к фазовой скорости для периодических волн.

Вне довольно узкой окрестности гребня волны из (7) следуют асимптотические оценки

$$v_x^s \sim -\tilde{c}^{-1}\delta_w\zeta_w, \quad v_z^s \sim -\tilde{c}\zeta_{wx}. \quad (8)$$

На первый взгляд может показаться, что соотношения (7) и тем более оценки (8) являются сугубо приближенными, однако приведенные в работе [17] результаты синхронных лазерных измерений продольной скорости  $v_x^s$  и волнового профиля  $\zeta_w$  как для периодических волн, так и для групп укрученных волн подтвердили, что оценка (8) хорошо работает на всей длине волн, кроме окрестности гребней опрокидывающихся волн (даже для групп волн), а соотношения (7) дают корректные результаты и на гребнях крутых волн. На рис. 6 приведен график зависимости  $v_x^s(t)$  и  $\zeta_w(t)$ , взятый из работы [17].

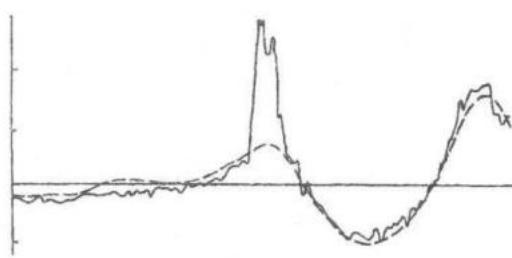


Рис 6- Экспериментальные зависимости  $v_x^s(t)$  (—) и  $\zeta_w(t)$  (---) для групп волн [17].

Приведенные выше зависимости сравнивались с асимптотическим решением для периодических волн Стокса шестого порядка по крутизне волн [4] и результаты сравнения подтвердили высокую точность метода полуобратной задачи.

При рассмотрении трехмерных групповых волновых движений необходимо в граничных условиях (5) учесть члены  $\zeta_{wy}v_y^s$  и  $v_y^s$  соответственно, а в соотношениях (6) дополнительно включить зависимость амплитуд и фаз кратных гармоник от медленных переменных (4). Однако эти поправки второго и выше порядка малости не вносят существенных изменений в базовые соотношения (7). Пример расчета проекций скоростей на волновом профиле показан на рис.7.

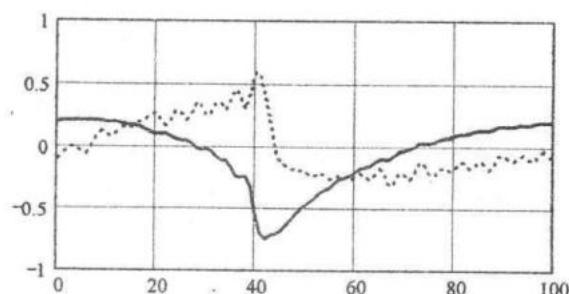


Рис 7- Проекции скоростей на волновом профиле укрученной волны (—  $v_x^s$ , ---  $v_z^s$ ).

4. Поля скоростей и давлений по глубине. Следующий этап – это расчет поля скоростей и давлений во всей области жидкости. Для плоских волн можно ввести комплексные переменные  $\tilde{z} = x + iz$  и  $\tilde{v} = v_x - iv_z$ , так что поле скоростей во всей жидкости определяется из интегральной формулы Коши [7]

$$v_x - iv_z = \frac{-i}{2\pi} v.p. \oint_{(S)} \frac{v_x^s - iv_z^s}{\zeta - \tilde{z}} d\tilde{\zeta}. \quad (9)$$

Соответственно, поле давлений определяется из интеграла Коши-Лагранжа [7], который после замены производной по времени от потенциала трансформируется к виду (для плоских волн)

$$P_w \approx -\rho \left[ cv_x + \frac{1}{2} (v_x^2 + v_z^2) + gz \right]. \quad (10)$$

Расчеты показали, что формула (10) дает небольшие вязкости волнового давления на свободной поверхности (динамическое граничное условие) порядка  $10^{-6}$ .

Для трехмерных волн с достаточно протяженными гребнями, что характерно для крупных волн в шторме [1], поперечная проекция скорости  $v_y$  и ее градиент  $\partial v_y / \partial y$  вдоль гребней имеют порядок  $O(\varepsilon^m)$ ,  $m \geq 2$  и поэтому формулы (9), (10) должны давать хорошие результаты и для этих волн. Приближенную оценку поперечной проекции  $v_y$  можно получить, проинтегрировав уравнение неразрывности по поперечной координате, начиная от центра группы волн.

**5. Дальнейшие обобщения.** Изложенный метод расчета гидродинамических характеристик крутых ветровых волн является приближенным и было бы полезно наметить пути его обобщения и уточнения. Представляется, что возможны два таких пути. Во-первых, приведенные зависимости можно рассматривать как первое приближение в некоторой итерационной схеме последовательного уточнения волнового профиля и поля скоростей волнового движения. Основные элементы такой схемы состоят в следующем. В первом приближении поле скоростей и давлений определяется в рамках оценки  $\zeta_{wt} = c\zeta_{wx}$ ,  $\varphi_t = c\varphi_x$  согласно (7)-(10). Для уточнения производных необходимы дополнительные соотношения. С этой целью сначала проинтегрируем уравнение неразрывности по вертикальной координате в пределах  $(-\infty; \zeta_w)$

$$\begin{aligned} (\varphi_z)^s &= - \int_{-\infty}^{\zeta_w} \varphi_{xx} dz = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\zeta_w} \varphi_x dz + (\varphi_x)^s \zeta_{wx}. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом первого граничного условия в (5) это выражение примет вид

$$\zeta_{wt} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\zeta_w} \varphi_x dz \quad (12)$$

и это будет дополнительное условие для производной от волнового профиля.

Далее, для получения второго условия введем в рассмотрение поверхностный потенциал  $\psi^s = (\varphi)^s$ , для которого справедливы дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} \psi_t^s &= (\varphi_t)^s + v_z^s \zeta_{wt}, \\ \psi_x^s &= v_x^s + v_z^s \zeta_{wx}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя эти соотношения, а также втрое граничное условие в (5), окончательно получим для временной производной  $(\varphi)^s$  соотношение

$$(\varphi_t)^s = cv_x^s - v_z^s (\zeta_{wt} - c\zeta_{wx}). \quad (14)$$

Выражения (12) и (14) можно использовать для уточнения временных производных и последующего определения поверхностных скоростей из (5) во втором приближении и т.д. Однако вопрос сходимости этой итерационной схемы пока остается открытым.

Второй путь обобщения исследований сильно нелинейных волн может быть связан с использованием Гамильтоновского формализма для сплошных сред, активно развивающегося в настоящее время в волновых задачах [2, 10]. В этом формализме переменные  $\zeta_w, \psi^s$  играют роль пары канонически сопряженных переменных, а граничные условия (5) – роль уравнений Гамильтона, которые в развернутом виде перепишутся следующим образом (для плоских волн)

$$\begin{aligned} \zeta_{wt} &= -\psi_x^s \zeta_{wx} + v_z^s (1 + \zeta_{wx}^2), \\ \psi_t^s &= \frac{1}{2} \psi_x^s {}^2 + g\zeta_w - \frac{1}{2} v_z^s {}^2 (1 + \zeta_{wx}^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Дальнейшая работа связана с построением цепочки канонических преобразований к новым каноническим переменным, в которых уравнения типа (15) оказываются более простыми для интегрирования [2, 10]. Первым этапом в этой цепочке является Фурье-разложение начального волнового поля (волновой поверхности, потенциала).

Проблема состоит, однако, в том, что в настоящее время Гамильтоновские методы развиты только для слабо нелинейных волн, поскольку важными компонентами

этого подхода являются спектральные разложения начального волнового поля и методы теории возмущений при дальнейших канонических преобразованиях переменных Гамильтона [2,10]. Кроме того, исключение из уравнений

(15) «лишней» неканонической переменной  $v_z^s$  также требует привлечения гипотезы о слабой нелинейности волн – фактически их слабой укрученности.

Для сильно нелинейных волн эти приемы, особенно спектральное разложение, принципиально не применимы. Кроме того, когда передний волновой склон становится вертикальным, левые части уравнений Гамильтона оказываются сингулярными, так как производные  $\zeta_{wt}, \psi_t^s$  стремятся к бесконечности. Представляется, что, по крайней мере, для слабо нерегулярных групп ветровых волн обойти эти трудности можно, выбрав в качестве канонических переменных (комплексные) амплитуды кратных равновесных гармоник, которые всегда являются конечными и не требуют приближения слабой нелинейности. Возможны и другие подходы в преодолении указанных трудностей, например, использование техники интегральных преобразований Гильберта и введение комплексных канонических переменных, как это предложено в работе [20].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс.- Л.: Гидрометеоиздат, 1978.- 286 с.
2. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Гамильтонов формализм для нелинейных волн // Успехи физ. наук. - 1997. - Т. 167, № 11. - С. 1137-1168.
3. Найфе А.Х. Методы возмущений: Пер. с англ. - М.: Мир, 1976. - 455 с.
4. Сердюченко А.Н., Румянцева И.Б. Гидродинамические характеристики волн Стокса, близких к предельным // Судостроение: Республ. межвед. научн.-техн. сб. - Киев-Одесса: Вища школа, 1987.- Вып. 36. - С. 19-23.
5. Сердюченко А.М. Гідродинаміка гранично крутих вітрових хвиль // Доповіді НАН України. - 2001.- N 8.- С. 35-41.
6. Сердюченко А.Н. Эволюционные уравнения Шредингера высоких порядков и некоторые их решения для волн на глубокой воде // Прикладная гидромеханика.- 2001.- Т. 3 (75), N 2.- С. 75-90.

7. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.- М.: Наука, 1977. - 815 с.
8. Bonmarin P. Geometric properties of deep-water breaking waves // J. Fluid Mech.- 1989.- Vol. 209.- P. 405-433.
9. Dommermuth D.G., Yue D.K.P., Lin W.M. et al. Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments // J. Fluid Mech. - 1988.- Vol. 189. - P. 423-442.
10. Krasitsky V.P. On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves // J. Fluid Mech. - 1994. - Vol. 272. - P. 1-20.
11. Longuet-Higgins M.S. The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. I. Superharmonic // Proc. R. Soc. Lond.-1978.- Vol. A 360. - P. 471-488.
12. Longuet-Higgins M.S., Cokelet E.D. The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation // Proc. R. Soc. Lond. - 1976.-Vol. A 360. - P. 1-26.
13. Longuet-Higgins M.S. Advances in the calculation of steep surface waves and plunging breakers // Second Int. Conf. Numeric. Ship Hydrodyn. - Berkeley, USA. - 1977. - P. 332-346.
14. Longuet- Higgins M.S. Parametric solutions for breaking waves // J. Fluid Mech.- 1982.- Vol. 121.- P. 403-424.
15. Longuet-Higgins M.S. On the forming of sharp corners at a free surface // Proc. R. Soc. Lond. - 1980.- Vol. A 371. - P. 453-478.
16. Longuet-Higgins M.S. On the overturning of gravity waves // Proc. R. Soc. Lond. - 1981.- Vol. A 376.- P. 377-400.
17. Melville W.K., Rapp R.J. The surface velocity field in steep and breaking waves // J. Fluid Mech.- 1988.- Vol. 188.- P. 1-22.
18. Takagi K., Naito S., Nakamura S. Computation of Nonlinear Hydrodynamic Forces on Two-Dimensional Body by Boundary Element Method // J. Kansai Soc. Naval Arch., Japan. - 1985. - N 197. - P. 31-38.
19. Tulin M.P., Yao Y., Magnuson A.K. The Evolution and Structure of Energetic Wind Waves // Proceed. ISOPE Confer. - 1996. - Vol. 3. - P. 1-17.
20. Дьяченко А.И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. РАН. - 2001. - Т. 376, № 1. - С. 27-29.