

**ПОЛУСПЕКТРАЛЬНАЯ
МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИИ
ТЕЧЕНИЙ НА ШЕЛЬФЕ
ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ ПОЛЯМИ
ВЕТРА И АТМОСФЕРНОГО
ДАВЛЕНИЯ**

Н.Г. Хоролитч

Морское отделение Украинского
научно-исследовательского гидро-
метеорологического института
г. Севастополь, ул. Советская, 61
Email: mb_uhmi@stel.sebastopol.ua

П.Д. Ломакин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2

В.Н. Хоролитч

Севастопольский национальный
технический университет
г. Севастополь, Студгородок

В рамках классической теории Экмана-Фельзенбаума предложена полуспектральная линейная модель течений. Рассматриваются случайные стационарные непрерывные процессы с нулевыми средними значениями. Получены аналитические выражения для коэффициентов Фурье ортогональных составляющих полных потоков и скорости течений. Исследуются особенности суперпозиции бароградиентной и градиентной скорости течений.

В настоящее время для решения многих научных и прикладных задач, связанных с изучением, освоением и охраной морской среды, резко возросли требования к качеству наших знаний о пространственно-временной изменчивости скорости течений. Как известно, только спектральная теория морских течений может обеспечить при этом необходимый уровень таких знаний. Поэтому создание такой теории становится сегодня одной из актуальнейших проблем геофизической гидродинамики.

Имеющийся на сегодня значительный объем информации по морским течениям, полученный, главным образом, в последние десятилетия на качественно новой основе, потребовал от исследователей разработки и новых методов ее обработки и анализа. Поскольку в качестве основы в таких методах, как известно, используется та или иная идея, то отсюда следует необходимость ее теоретического осмысления. Как это уже было неоднократно в океанографии, важная

роль при этом должна быть отведена гидродинамическому моделированию. В качестве примера можно привести так называемый метод "вращательных компонент", в последнее время с успехом применяемый в океанографии для спектрального анализа временных векторных рядов [1]. Теоретической основой данного метода является комплекснозначное представление двумерного векторного временного ряда (скорости течений) в частотной области.

В настоящее время принято считать, что одним из основных энергетических источников возмущений скорости течений и уровня в море являются аналогичные возмущения в атмосфере [2, 3]. Впервые задача о чисто дрейфовом течении, вызываемом произвольным периодическим ветром в однородном глубоком море, решалась в [4]. На важную роль направления вращения вектора скорости ветра в возникновении резонанса в поле силы Кориолиса, пожалуй, впервые было указано в [5]. Случай, когда кроме чисто дрейфовой составляющей скорости ветрового течения присутствует и ее градиентная составляющая, обусловленная неравномерностью поля ветра, исследовался в [6]. Влияние рельефа дна и берега на развитие ветровых течений в однородном море рассматривалось в [3]. Однако полученные при этом уравнения, к сожалению, не были приведены к полуспектральному виду (в его инвариантной форме), что не позволило получить содержательные физические выводы. Следует заметить, что этот недостаток характерен почти для всех ранних работ по данной проблеме, что в значительной степени обедняет ценность полученных в них выводов. Более подробный обзор работ по данной проблеме содержится в работе [7].

Временные спектры скорости течений и уровня исследовались в [8 – 10], а пространственно-временные – в [11 – 14]. Если в [8 – 13] учитывалось только тангенциальное напряжение ветра, то в [7, 14, 15] данный фактор учитывался вместе с определяемым его горизонтальным градиентом атмосферного давления.

Целью данной работы является построение теоретической полуспектральной модели временных спектров чисто дрейфовых, бароградиентных и градиентных полных потоков и скорости течений, генерируемых в однородном море взаимосвязан-

ными полями ветра и атмосферного давления.

Предлагаемая модель представляет собой дальнейшее обобщение классической задачи Экмана-Фельзенбаума в теории морских течений на случай произвольных полей тангенциального напряжения ветра и атмосферного давления. Хотя рамки использованного в данной работе подхода в принципе позволяют исследовать данную проблему для баротропного моря в целом, тем не менее в ней показано, что для достижения большей наглядности и упрощения доказательства некоторых принципиальных моментов предпочтительнее рассмотреть случай прямолинейного шельфа с произвольным (цилиндрическим) профилем дна.

Постановка задачи классическая: в линейных уравнениях движения учитываются силы вертикального трения, трения на дне, Кориолиса, а также наклоны свободной поверхности моря. Результаты анализа представлены в полуспектральной инвариантной форме.

Начало декартовых координат расположено на невозмущенной поверхности моря: ось Ox направлена вдоль берега, ось Oy – в море, а ось Oz – вертикально вниз. Система горизонтальных координат – правая. С учетом специфики задачи уравнения движения для вязкой однородной жидкости и граничные условия в линейном приближении запишем в комплексном виде:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - i f W = G + P^h, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (2)$$

$$A \left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{\tau}{\rho}, \quad W|_{z=H} = 0, \quad (3)$$

$$W = u + iv, \quad \tau = \tau_x + i\tau_y, \quad (4)$$

$$G = -g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \quad P^h = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad (5)$$

$$S_x = \int_0^H u dz, \quad S_y = \int_0^H v dz; \quad (6)$$

$$\text{у прямолинейного берега (} y=0 \text{):} \\ S_y = 0; \quad (7)$$

на открытой границе шельфа предполагается, что возмущения уровня определяются только воздействием атмосферного давления, т.е. учитывается равновесный уровень.

В этих уравнениях и граничных условиях: W , u , v – скорость течения и ее составляющие вдоль действительной и мнимой осей декартовых координат Ox и Oy соответственно; t – время; A – кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена; $f = 2\Omega_r \sin \varphi_r$ – параметр Кориолиса (здесь Ω_r – угловая скорость вращения Земли, φ_r – широта места, $f > 0$ в северном полушарии); g – ускорение силы тяжести; ζ – уровень (отклонение поверхности моря от невозмущенного горизонтального положения $z = 0$); P – атмосферное давление; $\rho = \text{const}$ – плотность морской воды; τ , τ_x , τ_y – тангенциальное напряжение трения и его составляющие соответственно вдоль действительной и мнимой осей координат Ox и Oy на поверхности моря; S_x , S_y – составляющие полного потока S соответственно вдоль действительной и мнимой осей координат Ox и Oy , $H = H(x, y)$ – глубина.

Уравнение (1) преобразуем в область образов по Фурье с учетом специфики решаемой задачи:

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial z^2} - j^2 W^* = \frac{P^h}{\rho A}, \quad (8)$$

где $j = \sqrt{i(f + \omega)/A}$, $\omega = 2\pi/T$ – угловая частота, T – период, а переменные W^* и P^h связаны с W и P^h с помощью преобразования Фурье.

Аналогично преобразуются и граничные условия (3). С целью удобства записи знак “*” при W , P^h , τ и другими аналогичными переменными в дальнейшем будет опущен.

Так как рассматриваются непрерывные стационарные процессы с нулевыми средними значениями, то выражение для $W(t)$ (а также и для других переменных) можно, вообще говоря, представить в следующем виде (здесь и далее аргументы x , y и z с целью удобства записи опущены):

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \exp(i\omega_n t) + C_{-n} \exp(-i\omega_n t)], \quad (9)$$

где $C_{\pm n}$ – комплексные коэффициенты Фурье функции $W(t)$, ω_n – угловая частота, а

n — суть целые положительные числа ($\omega_h > 0$).

В выбранной системе координат комплексные составляющие $C_{\pm n}$ вектора $W(t)$ в (9) вращаются в положительном и отрицательном направлениях (т.е. против и по часовой стрелке) соответственно относительно оси Ox , описывая при этом, вообще говоря, эллипс.

Выражения, связывающие комплексные коэффициенты Фурье $C_{\pm n}$ вектора $W(t)$ с аналогичными коэффициентами его ортогональных составляющих, имеют следующий вид:

$$2C_{\pm} = W_{\pm} = u_{\pm} \pm iv_{\pm}, \quad (10)$$

где $u_{\pm} = u_a \pm v_b$, $v_{\pm} = v_a \mp u_b$, u_a , u_b , v_a и v_b — коэффициенты Фурье ортогональных составляющих скорости течения $u(t)$ и $v(t)$, а индексы a и b — косинус- и синус-разложение по временной координате t соответственно (здесь и далее в этих и других аналогичных коэффициентах индекс n с целью упрощения записи опущен).

Комплексные коэффициенты Фурье C_{\pm}^p , C_{\pm}^r и C_{\pm}^z соответственно для горизонтального градиента атмосферного давления, вектора тангенциального напряжения ветра и наклона уровня имеют следующий вид:

$$2C_{\pm}^p = P_{\pm} = P_{\pm}^x + iP_{\pm}^y, \quad 2C_{\pm}^r = T_{\pm} = T_{\pm}^x + iT_{\pm}^y,$$

$$2C_{\pm}^z = G_{\pm} = G_{\pm}^x + iG_{\pm}^y, \quad (11)$$

где

$$P_{\pm}^x = \frac{\partial P_a}{\partial x} \pm \frac{\partial P_b}{\partial y}, \quad P_{\pm}^y = \frac{\partial P_a}{\partial y} \mp \frac{\partial P_b}{\partial x},$$

$$T_{\pm}^x = \tau_a^x \pm \tau_b^y, \quad T_{\pm}^y = \tau_a^y \mp \tau_b^x, \quad (12)$$

$$G_{\pm}^x = \frac{\partial \zeta_a}{\partial x} \pm \frac{\partial \zeta_b}{\partial y}, \quad G_{\pm}^y = \frac{\partial \zeta_a}{\partial y} \mp \frac{\partial \zeta_b}{\partial x},$$

а P_a , P_b , τ_a^x , τ_b^x , τ_a^y , τ_b^y , ζ_a , ζ_b — коэффициенты Фурье соответственно атмосферного давления P , ортогональных составляющих вектора тангенциального напряжения ветра τ и отклонения уровня ζ от $z = 0$ по t .

Далее вместо C_{\pm}^p , C_{\pm}^r , C_{\pm}^z и других аналогичных коэффициентов условно будем подразумевать их удвоенные значения.

Для установления связи между горизонтальным градиентом атмосферного давления и обусловленным им тангенциальным напряжением ветра использовалось обобщение приближения Аккерблома для рассматриваемой задачи [7, 14 — 17]. В результате были получены следующие соотношения между комплексными коэффициентами Фурье C_{\pm}^p и C_{\pm}^r :

$$C_{\pm}^p = -a_{\pm}^*(1 + qi)C_{\pm}^r, \quad C_{\pm}^r = -\chi_{\pm}(1 - qi)C_{\pm}^p, \quad (13)$$

где

$$\chi_{\pm} = 1/2a_{\pm}^*, \quad a_{\pm}^* = \sqrt{|f + \omega_{\pm}|/2A_{\pm}},$$

$A_{\pm} = \text{const}$ — кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена в атмосфере.

Уравнение неразрывности (2) преобразуется в следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial S_a^x}{\partial x} + \frac{\partial S_a^y}{\partial y} = \omega_{\pm} \zeta_b, \quad (14)$$

$$\frac{\partial S_b^x}{\partial x} + \frac{\partial S_b^y}{\partial y} = -\omega_{\pm} \zeta_a,$$

где S_a^x , S_b^x , S_a^y , S_b^y — соответственно коэффициенты Фурье ортогональных составляющих S_x и S_y полного потока S по временной координате t .

Решение уравнения (8) с учетом граничных условий (3) будет иметь следующий вид:

$$W = \frac{\tau}{jA\rho} \frac{\text{sh}j(H-z)}{\text{ch}jH} + \frac{(G + P^h)}{j^2} \left(\frac{\text{ch}jz}{\text{ch}jH} - 1 \right), \quad (15)$$

где

$$j = a_{\pm}(1 + qi), \quad q = \text{sign}(f + \omega_{\pm}), \\ a_{\pm} = \sqrt{|f + \omega_{\pm}|/2A_{\pm}}.$$

Из (15) получим следующие соотношения для составляющих W_{\pm} вектора скорости течения в (10) и аналогичных частей обуславливающих их факторов:

$$W_{\pm} = D_{\pm}(T_{\pm}^x + iT_{\pm}^y) + \Gamma_{\pm}(Z_{\pm}^x + iZ_{\pm}^y), \quad (16)$$

где

$$D_{\pm} = N_{\pm} - iqM_{\pm}, \quad \Gamma_{\pm} = B_{\pm} - iq\Lambda_{\pm},$$

$$Z_{\pm}^x = (G_{\pm}^x - P_{\pm}^x / g\rho), \quad Z_{\pm}^y = (G_{\pm}^y - P_{\pm}^y / g\rho),$$

а коэффициенты N_{\pm} , M_{\pm} , B_{\pm} и Λ_{\pm} вычисляются с помощью нижеприведенных формул:

$$\begin{aligned} N_{\pm} &= \delta f_1 + \gamma f_2, \quad M_{\pm} = \delta f_2 - \gamma f_1, \\ B_{\pm} &= g f_4 r / 2A a_{\pm}^2, \quad \Lambda_{\pm} = g f_3 / 2A a_{\pm}^2, \\ \delta &= r(f_5 + f_6) / a_{\pm} A \rho, \quad \gamma = r(f_5 - f_6) / a_{\pm} A \rho, \\ f_1 &= ch \eta_{\pm} \sin \eta_{\pm}, \quad f_2 = sh \eta_{\pm} \cos \eta_{\pm}, \\ f_3 &= 1 - r(ch \theta_{\pm} \cos \eta_{\pm} + ch \eta_{\pm} \cos \theta_{\pm}), \quad (17) \\ f_4 &= sh \theta_{\pm} \sin \eta_{\pm} + sh \eta_{\pm} \sin \theta_{\pm}, \\ f_5 &= cha_{\pm} H \cos a_{\pm} H, \quad f_6 = sha_{\pm} H \sin a_{\pm} H, \\ r &= 1 / (ch 2a_{\pm} H + \cos 2a_{\pm} H), \\ \eta_{\pm} &= a_{\pm} H (1 - z / H), \quad \theta_{\pm} = a_{\pm} H (1 + z / H). \end{aligned}$$

Проинтегрировав выражение для комплексной скорости (15) от $z = 0$ до $z = H$, получим следующие выражения для составляющих S_{\pm} вектора полного потока и аналогичных частей обуславливающих их факторов:

$$S_{\pm} = w_{\pm} (T_{\pm}^x + iT_{\pm}^y) + b_{\pm} (Z_{\pm}^x + iZ_{\pm}^y), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= S_{\pm}^x + iS_{\pm}^y, \quad S_{\pm}^x = S_{\pm}^x \pm S_{\pm}^y, \quad S_{\pm}^y = S_{\pm}^y \mp S_{\pm}^x, \\ w_{\pm} &= n_{\pm} - iqm_{\pm}, \quad b_{\pm} = \beta_{\pm} - iq\alpha_{\pm}, \end{aligned}$$

а n_{\pm} , m_{\pm} , β_{\pm} и α_{\pm} – проинтегрированные по z (от $z = 0$ до $z = H$) коэффициенты N_{\pm} , M_{\pm} , B_{\pm} и Λ_{\pm} соответственно:

$$n_{\pm} = f_6 r / A \rho a_{\pm}^2, \quad m_{\pm} = (1 - 2f_3 r) / 2A \rho a_{\pm}^2,$$

$$\begin{aligned} S_a^y &= t_a^y - \frac{1}{2\omega_{\pm}} [(\beta_{+} + \beta_{-}) \frac{\partial^2 S_b^y}{\partial y^2} + (\alpha_{+} - q\alpha_{-}) \frac{\partial^2 S_a^y}{\partial y^2}], \quad (20) \\ S_b^y &= t_b^y - \frac{1}{2\omega_{\pm}} [(\alpha_{+} - q\alpha_{-}) \frac{\partial^2 S_b^y}{\partial y^2} - (\beta_{+} + \beta_{-}) \frac{\partial^2 S_a^y}{\partial y^2}], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} t_a^y &= -0,5 [K_{+}^m T_{+}^x - K_{+}^n T_{+}^y + qK_{-}^m T_{-}^x - K_{-}^n T_{-}^y], \\ t_b^y &= 0,5 [K_{+}^n T_{+}^x + K_{+}^m T_{+}^y - K_{-}^n T_{-}^x - qK_{-}^m T_{-}^y], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\pm}^n &= n_{\pm} + q_{\pm}^* (\alpha_{\pm} + \beta_{\pm}), \quad (21) \\ K_{\pm}^m &= m_{\pm} + q_{\pm}^* (\alpha_{\pm} + \beta_{\pm}), \quad q_{\pm}^* = a_{\pm}^* / g\rho. \end{aligned}$$

Поскольку чисто дрейфовая и бароградиентная составляющие характеристик течения, в отличие от градиентной составляющей, зависят только от глубины места, то только с целью удобства интерпретации полученных результатов целесообразно условно совместить оси глубины места H и

$$\begin{aligned} \beta_{\pm} &= gr(\operatorname{sh} 2a_{\pm} H - \sin 2a_{\pm} H) / 4A a_{\pm}^3, \quad (19) \\ \alpha_{\pm} &= g[H - r(\operatorname{sh} 2a_{\pm} H + \sin 2a_{\pm} H) / 2a_{\pm}] / 2A a_{\pm}^2. \end{aligned}$$

Следует заметить, что в (16) и (18) углы отклонения от мнимой оси Oy для векторов D_{\pm} и w_{\pm} представляют собой, по сути, углы отклонения чисто дрейфовой, а аналогичные углы для комплексных векторов Γ_{\pm} и b_{\pm} – углы отклонения градиентной и бароградиентной составляющих скорости течений и полного потока относительно соответствующих вынуждающих сил соответственно. Действительная и мнимая часть этих векторов – соответственно прямой и отклоненный чисто ветровой (D_{\pm} и w_{\pm}), градиентный и бароградиентный дрейф (Γ_{\pm} и b_{\pm}) (рис. 1 и 2).

Из совместного анализа (12) и (14) следует, что для решения данной задачи в случае прямолинейного шельфа с произвольным (цилиндрическим) профилем дна достаточно найденные из (14) выражения для $\partial \zeta_a / \partial u$ и $\partial \zeta_b / \partial u$ подставить в выражения для коэффициентов Фурье S_a^y и S_b^y полного потока, найденные в свою очередь из (18), а затем последние подставить в (14) для нахождения $\partial \zeta_a / \partial u$ и $\partial \zeta_b / \partial u$. В результате получим следующую систему двух уравнений:

расстояния от берега L . Вполне очевидно, что данное требование будет выполняться в случае прямолинейного профиля дна исследуемого участка шельфа. При этом оси относительной частоты $\Omega = |\omega_{\pm}| / f$ и расстояния L были условно приняты в качестве действительной и мнимой осей комплексной плоскости соответственно.

Система дифференциальных уравнений (20) аппроксимировалась непосредственно разностными схемами при $\Delta \Omega = 0,012$ и $\Delta L = 1000$ м (где $\Delta \Omega$ – шаг по частоте, а ΔL – пространственный шаг). Полученная таким образом задача, представляющая собой частный случай для трехточечных уравнений,

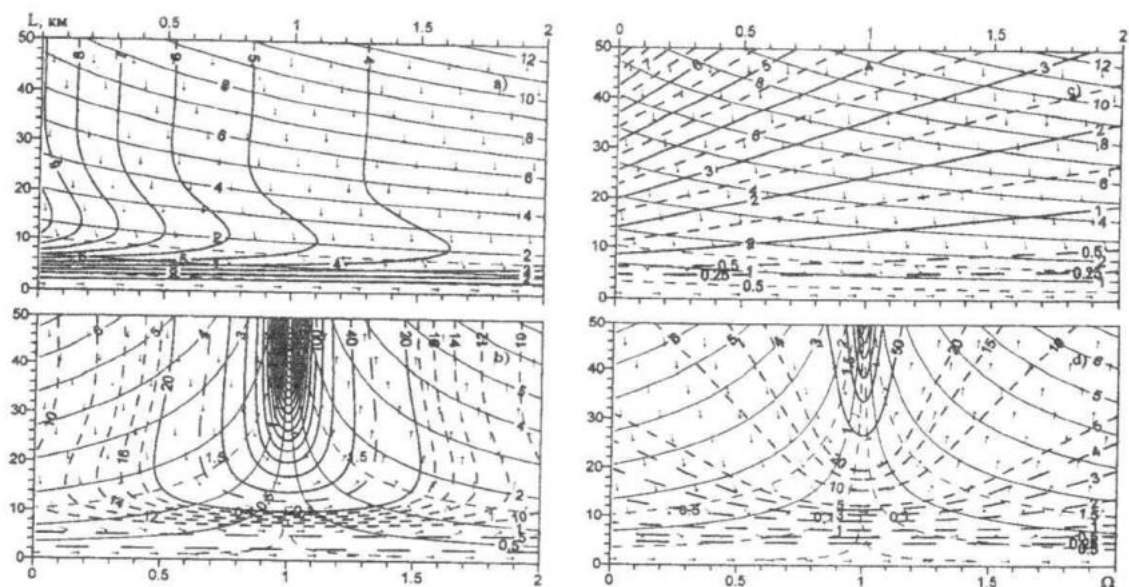


Рис. 1 – Графики зависимостей полуэмпирических комплексных коэффициентов чисто ветрового $n_{\pm} - iqm_{\pm}$ (a, b), $10^{-3} \text{ кг}^{-1} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}$ и градиентного $\beta_{\pm} - iq\alpha_{\pm}$ (c, d), $10^6 \text{ м}^2/\text{с}$ дрейфа от относительной частоты $\Omega = |\omega_{\pm}|/f$ и расстояния L . Примечание: $H=0,002(1000+L)$, a), c): ω_{+} ; b), d): ω_{-} ; тонкие (дополнительные) изолинии – безразмерный параметр $a_{\pm}H$.

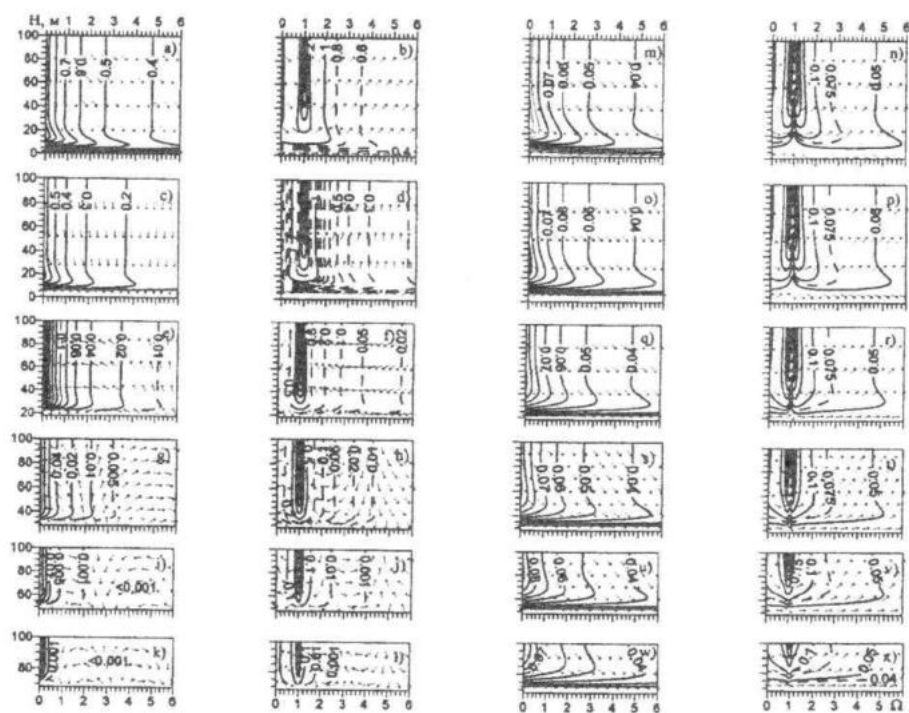


Рис. 2 – Графики зависимостей чисто дрейфовой (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l) и бароградиентной (m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x) скорости течений, м/с при $T_{\pm} = T_{\pm}^* = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ от относительной частоты $\Omega = |\omega_{\pm}|/f$ и глубины H на горизонтах: 0 (a, b, m, n), 5 (c, d, o, p), 20 (e, f, q, r), 30 (g, h, s, t), 50 (i, j, u, v) и 70 м (k, l, w, x). Примечание: a, c, e, g, i, k, m, o, q, s, u, w: ω_{+} ; b, d, f, h, j, l, n, p, r, t, v, x: ω_{-} .

была решена методом матричной прогонки [18]. Корректность данного метода для принятых значений $\Delta\Omega$, ΔL , $A_*=1$ м²/с, $A=0,01$ м²/с и $H=0,002(1000+L)$ соблюдалась.

Проблему генерации градиентного полного потока исследуем с точки зрения влияния на нее как типов внешнего воздействия, так и полуэмпирических коэффициентов α_{\pm} и β_{\pm} . Не нарушая общности рассуждений, а также используя некоторые свойства предложенной физической модели поведения вектора на комплексной плоскости (имеющие, как будет продемонстрировано ниже, принципиальное значение), положим, что $T_{\pm} = T_{\pm}^x$ (см. (11)). В случае прямолинейного шельфа с произвольным (цилиндрическим) профилем дна независимо от того, одна из составляющих T_{\pm}^x или они обе вместе воздействуют на воды шельфа, разнонаправленно вращающиеся составляющие градиентного полного потока формально определяются, как следует из (12), одинаковыми по модулю и ориентированными симметрично относительно мнимой оси Oy соответствующими им разнонаправленно вращающимися составляющими градиента уровня G_{\pm} .

Таким образом, строго говоря, в каждой из этих физических ситуаций суперпозиция разнонаправленно вращающихся составляющих G_{\pm} градиента уровня представляет собой, по сути, суперпозицию только их мнимых составляющих, т.е. во временной области результирующий градиент уровня при этом совершает реверсивные колебания вдоль оси Oy , причем его амплитуда изменяется от нуля до $[(\partial\zeta_x/\partial y)^2 + (\partial\zeta_y/\partial x)^2]^{1/2}$.

С точки зрения выяснения роли знака направленности вращения вектора тангенциального напряжения ветра проблема механизма генерации градиентного полного потока (или скорости течения) в своей основе имеет, по крайней мере, два принципиальных момента: как соотносятся между собой его составляющие, вращающиеся, во-первых, разнонаправленно для каждой из действующих в отдельности составляющих T_{\pm}^x и их суперпозиции, и, во-вторых, однонаправленно для разнонаправленно вращающихся составляющих T_{\pm}^x . Второй из отмеченных выше моментов важен, прежде всего, с той точки зрения, что в случае, ко-

гда фазовые углы составляющих градиентного полного потока близки или отличаются на угол $\cong \pi$, модуль результирующего вектора данного потока будет представлять собой соответственно сумму модулей его (потока) составляющих или их разность.

Итак, для каждой составляющей T_{\pm}^x система уравнений (18) примет более простой вид:

$$S_{\pm}^{T_x^x} = (K_{\pm}^n - iqK_{\pm}^m)T_{\pm}^x + G_{\pm}^{T_x^x}, \quad S_{\pm}^{T_y^x} = G_{\pm}^{T_y^x}, \quad (22)$$

где

$$G_{\pm}^{T_x^x} = (\beta_{\pm} - iq\alpha_{\pm})G_{\pm}(T_{\pm}^x), \quad (23)$$

$$G_{\pm}^{T_y^x} = (\beta_{\pm} - iq\alpha_{\pm})G_{\pm}(T_{\pm}^x),$$

а T_{\pm}^x в круглых скобках является аргументом соответствующих составляющих градиента уровня.

Из анализа выражений (22) и (23) следует, в частности, что в результате воздействия одной из составляющих тангенциального напряжения ветра T_{\pm}^x , кроме основной составляющей градиентного полного потока (знак поляризации вращения которой совпадает с аналогичным знаком данной составляющей T_{\pm}^x), генерируется его дополнительная составляющая с противоположным знаком поляризации своего вращения. Кроме того, из анализа этих выражений следует, что для каждой из действующих в отдельности составляющих T_{\pm}^x , а также их суперпозиции соотношение между разнонаправленно вращающимися составляющими градиентного полного потока определяется, по сути, соотношением между соответствующими им комплексными коэффициентами градиентного дрейфа $\beta_{\pm} - i\alpha_{\pm}$ и $\beta_{\pm} - iq\alpha_{\pm}$. С другой стороны, из этих же выражений также следует, что соотношение между составляющими градиентного полного потока, имеющими один и тот же знак поляризации вращения для разнонаправленно вращающихся составляющих T_{\pm}^x , определяется, в отличие от предыдущего случая, комплексными коэффициентами чисто ветрового дрейфа $K_{\pm}^n - iK_{\pm}^m$ и $K_{\pm}^n - iqK_{\pm}^m$ (рис. 3 - 5). Поскольку, вообще говоря,

$$\beta_{\pm} - i\alpha_{\pm} < \beta_{\pm} - iq\alpha_{\pm}, \quad a$$

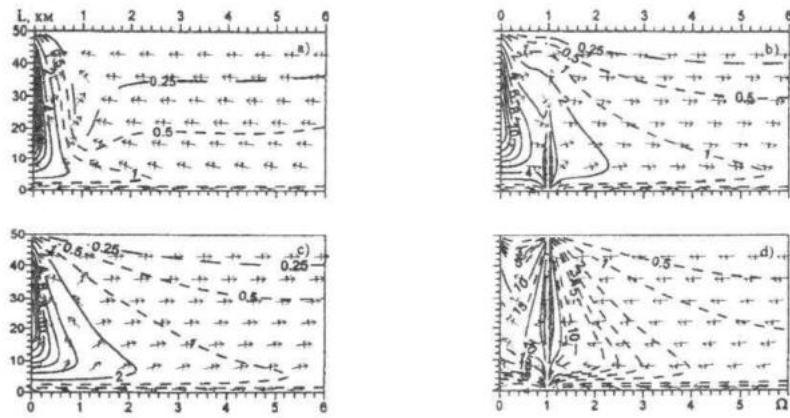


Рис. 3 – Графики зависимостей градиентного полного потока (малые стрелки), m^2/c и направлений градиента $(\pm \partial \zeta_x / \partial y + i \partial \zeta_y / \partial x)_\pm$ уровня ζ при $T_\pm = T_\pm^x = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ от относительной частоты $\Omega = |\omega_\pm|/f$ и расстояния L . *Примечание:* $H=0,002(1000+L)$, а) T_+^x, ω_+ ; б) T_-^x, ω_- ; в) T_+^x, ω_- ; д) T_-^x, ω_+ .

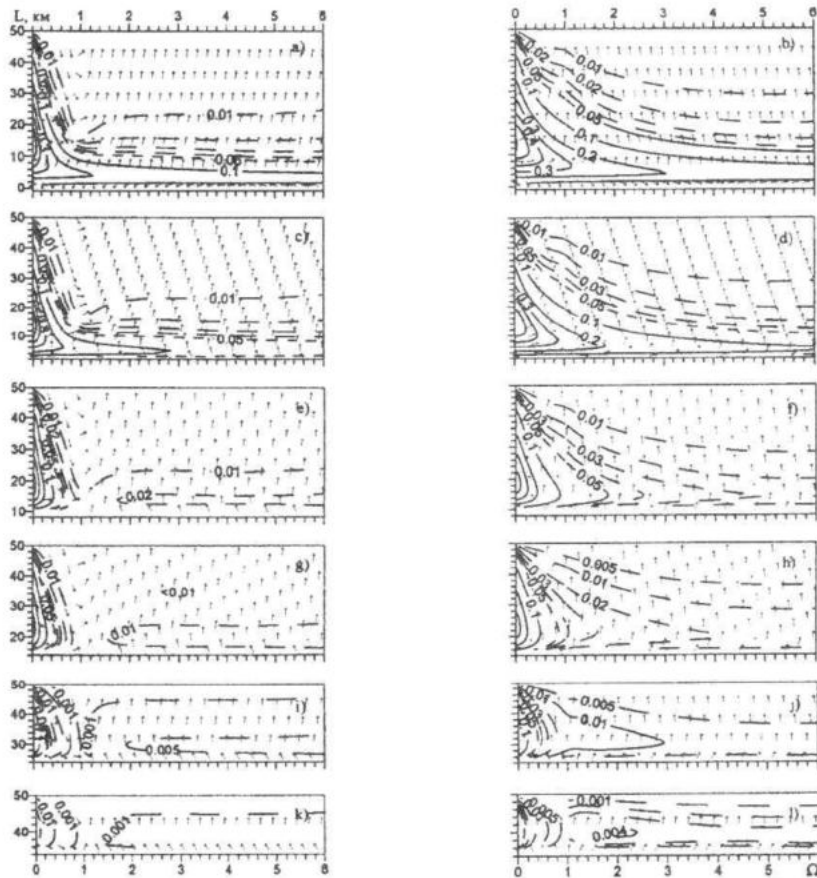


Рис. 4 – Графики зависимостей градиентной скорости течений, m/c при $T_+ = T_+^x = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ от относительной частоты $\Omega = |\omega_\pm|/f$ и расстояния L на горизонтах: 0 (а, б), 5 (с, д), 20 (е, ф), 30 (г, h), 50 (и, j) и 70 м (к, л). *Примечание:* $H=0,002(1000+L)$, а, с, е, г, и, к: ω_+ ; б, д, ф, h, j, л: ω_- .

$K_+^n - iK_+^m < K_-^n - iqK_-^m$, то отсюда следует, что

$$|G_+^{T^z}| < |G_-^{T^z}|, |G_+^{T^z}| < |G_-^{T^z}|, \quad (24)$$

$$|G_+^{T^z}| > |G_-^{T^z}|, |G_-^{T^z}| > |G_+^{T^z}|, |G_-^{T^z}| > |G_+^{T^z}|.$$

Для исследуемой области, за исключением близинерционного интервала, ограниченного глубинами от нескольких до 40 – 50 м, справедливо следующее соотношение:

$$|G_+^{T^z}| \approx |G_-^{T^z}|. \quad (25)$$

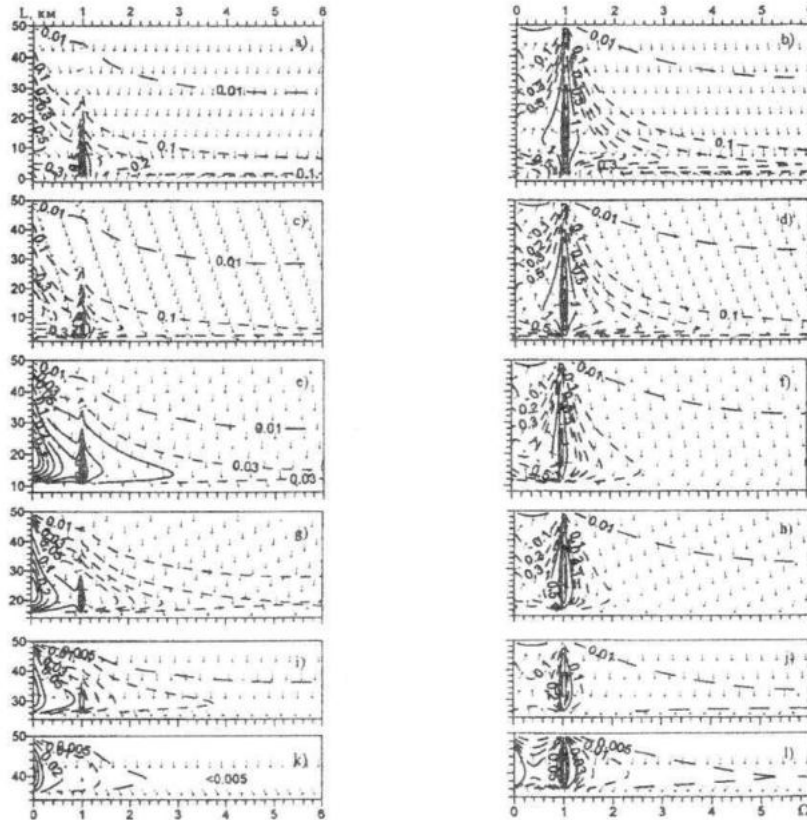


Рис. 5 – Графики зависимостей градиентной скорости течений, м/с при $T_- = T^x = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2}$ от относительной частоты $\Omega = |\omega_{\pm}|/f$ и расстояния L на горизонтах: 0 (a, b), 5 (c, d), 20 (e, f), 30 (g, h), 50 (i, j) и 70 (k, l) м. Примечание: $H=0,002(1000+L)$, a, c, e, g, i, k: ω_+ ; b, d, f, h, j, l: ω_- .

Анализ зависимостей полуэмпирических коэффициентов n_{\pm} , m_{\pm} , β_{\pm} , α_{\pm} , $n_{\pm} - iqm_{\pm}$ и $\beta_{\pm} - iq\alpha_{\pm}$ от относительной частоты Ω и глубины H показал (см. рис.1), что n_{\pm} , β_{\pm} , $n_{\pm} - iqm_{\pm}$ и $\beta_{\pm} - iq\alpha_{\pm}$ имеют максимум при $\Omega = 1$, а m_{\pm} , α_{\pm} – в близинерционной области (слева и справа от $\Omega=1$). Причем по мере увеличения H значения Ω , соответствующие этим значениям m_{\pm} и α_{\pm} , асимптотически приближаются к 1. При $\Omega \rightarrow 1$ $m_{\pm} \rightarrow 0$ и $\alpha_{\pm} \rightarrow 0$ (что может быть достигнуто при довольно значительном увеличении $|\partial^2 m_{\pm} / \partial \omega_{\pm} \partial H|$ и $|\partial^2 \alpha_{\pm} / \partial \omega_{\pm} \partial H|$), а коэффициенты n_{\pm} и β_{\pm} за счет своих макси-

мумов обеспечивают соответствующие максимумы комплексных коэффициентов $n_{\pm} - iqm_{\pm}$ и $\beta_{\pm} - iq\alpha_{\pm}$.

Из вышеприведенного анализа свойств используемой физической модели исследуемых векторов следует, что совокупность задаваемых по нормали к берегу векторов ветра, имеющих, вообще говоря, разные начальные фазовые углы как на частоте ω_+ , так и на частоте ω_- , вращается как единое целое вместе с соответствующими им совокупностями векторов полного потока (или скорости течения), причем им, в отличие от чисто дрейфовой и бароградиентной составляющих, будут соответствовать, вооб-

ще говоря, градиентные составляющие, совершающие круговые движения обоих знаков. Разрешение данной проблемы в строгой математической формулировке будет рассмотрено несколько ниже.

Итак, соотношение между направлением ψ_{Δ}^{\pm} чисто дрейфовой составляющей полного потока (или скорости течения) и соответствующим ему направлением Φ^{\pm} тангенциального напряжения ветра T_{\pm} (индексы-знаки вверху в Φ^{\pm} соответствуют индексам-знакам T_{\pm}) в соответствии с (16) имеет простой вид:

$$\psi_{\Delta}^{\pm} = \Phi^{\pm} - q\Delta_{\pm}, \quad (26)$$

где Δ_{\pm} — здесь и далее угол поворота вектора соответствующей характеристики движения вод (вследствие влияния силы Кориолиса) относительно вектора действующей силы (в соответствии с (16) и (18) $\Delta_{\pm} > 0$).

Аналогичные соотношения для градиента равновесного уровня φ_A^{\pm} и бароградиентной составляющей полного потока или скорости течения ψ_B^{\pm} (см. (16) и (18)) имеют также простой вид:

$$\varphi_A^{\pm} = \Phi^{\pm} + q\pi/4, \quad \psi_B^{\pm} = \varphi_A^{\pm} - q\Delta_{\pm}. \quad (27)$$

Как следует из анализа формул (26) и (27), составляющие чисто дрейфовой и бароградиентной полного потока и скорости течения описывают окружности.

Поскольку форма представления Δ_{\pm} в (26), а также и в других аналогичных выражениях (для градиентных составляющих полного потока и скорости течения), приведенные ниже, имеет по сути один и тот же физический смысл, то в дальнейшем достаточно ограничиться рассуждениями относительно составляющих градиентного полного потока.

Соотношение между направлением φ_m^{\pm} составляющей градиента уровня G_{\pm} и соответствующим ему направлением Φ^{\pm} вектора тангенциального напряжения ветра T_{\pm} в дифференциальной форме имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi_m^{\pm}}{\partial t} = \pm m_* \frac{\partial \Phi^{\pm}}{\partial t} = \omega_m, \quad (28)$$

где $m = \text{sign}(m_*)$, $m_* = \pm 1$.

Впрочем, соотношения, аналогичные (28), справедливы и для составляющих градиентного полного потока.

В результате интегрирования системы дифференциальных уравнений (28) имеем следующее уравнение:

$$\varphi_m^{\pm}(t_2) = \varphi_m^{\pm}(t_1) \pm m_* [\Phi^{\pm}(t_2) - \Phi^{\pm}(t_1)], \quad (29)$$

где t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) — моменты времени t .

Полагая, что $\Phi^{\pm}(t_1) = 0$ при $t_1 = 0$, из (29) получим основное соотношение между направлением φ_m^{\pm} составляющей градиента уровня G_{\pm} и соответствующим ему направлением Φ^{\pm} тангенциального напряжения ветра T_{\pm} :

$$\varphi_m^{\pm} = \varphi_m^{\pm}(0) \pm m_* \Phi^{\pm} = A_m^{\pm} \pm m_* \Phi^{\pm}, \quad (30)$$

Учитывая то, что угол A_m^{\pm} , как будет видно в дальнейшем, играет важную роль в исследовании механизма генерации градиентной скорости течений, условно назовем его базисным. Угол φ_m^{\pm} (как, впрочем, и угол A_m^{\pm}) в соответствии с (12) связан с углом φ_{-m}^{\pm} следующей зависимостью:

$$\varphi_m^{\pm} = -\varphi_{-m}^{\pm} + \pi_p, \quad (31)$$

где $\pi_p = \pm \pi$.

Следовательно, двойной угол ориентации большей оси эллипса (точнее окружности), описываемого составляющими градиента уровня, которые соответствуют направлению Φ^{\pm} тангенциального напряжения ветра T_{\pm} , как и следовало ожидать (см. (12)), равен

$$\varphi_m^{\pm} + \varphi_{-m}^{\pm} = A_m^{\pm} + A_{-m}^{\pm} = \pi_p. \quad (32)$$

Для градиентной составляющей полного потока по аналогии с (28) и (30) можно записать следующее соотношение:

$$\psi_m^{\pm} = \beta_m^{\pm} \pm m_* \Phi^{\pm}, \quad (33)$$

где $\psi_m^{\pm}, \beta_m^{\pm}$ — фазовый и базисный углы характеристик движения вод соответственно.

В свою очередь, базисный угол β_m^{\pm} определяется с помощью следующего выражения (см. (16) и (18)):

$$\beta_m^\pm = A_m^\pm - q\Delta_m. \quad (34)$$

Особый интерес представляет исследование суперпозиции градиентных составляющих полного потока с одинаковой поляризацией вращения при совпадении их фазовых углов ($\psi_+^+ = \psi_-^+$ и/или $\psi_-^+ = \psi_+^+$), так как это обусловит увеличение соответствующей "вращательной компоненты" (по терминологии [1]) на частоте ω_\pm , которое в данном случае может быть объяснено исключительно фазовыми характеристиками тангенциального напряжения ветра. Соответственно при $\psi_m^+ = \psi_m^- + \pi_p$ будет наблюдаться уменьшение данной компоненты.

Итак, при $\psi_m^+ = \psi_m^-$ будет справедливым следующее выражение для удвоенного угла ориентации большой оси эллипса вращения результирующего вектора градиентного полного потока, соответствующего данной физической ситуации:

$$\Phi^+ + \Phi^- = -A_+^+ - A_-^- + \pi_p. \quad (35)$$

Таким образом, в данном случае роль углов вида A_m^\pm (см. (30)) несколько конкретизируется.

С учетом (34) выражение (35) примет следующий вид:

$$\Phi^+ + \Phi^- = \Delta_\beta - \Delta_g, \quad (36)$$

где

$$\Delta_\beta = \beta_+^- - \beta_+^+ = \beta_-^+ - \beta_-^-, \quad \Delta_g = \Delta_+ + q\Delta_-.$$

Как видим, роль углов вида β_m^\pm также конкретизируется по аналогии с (35), и для них может быть сформулировано выше приведенное правило определения $\Phi^+ + \Phi^-$.

Из анализа формулы (33) следует, что угол ориентации большой оси эллипса вращения результирующего вектора градиентного полного потока формально можно исследовать с точки зрения суперпозиции его разнонаправленно вращающихся составляющих, принадлежащих как одной из составляющих тангенциального напряжения ветра T_\pm , так и каждой из них в отдельности.

Для этих случаев соответственно имеем:

$$\psi_+^+ + \psi_-^+ = \pi_p - \Delta_g, \quad (37)$$

$$\psi_\pm^+ + \psi_\mp^- = A_\pm^+ + A_\mp^- \pm \Phi^+ \pm \Phi^- - \Delta_g. \quad (38)$$

В частности, из (37) следует, что угол ориентации большой оси эллипса вращения результирующего градиентного полного потока не зависит от направлений Φ^\pm тангенциального напряжения ветра T_\pm , которые определяют только фазы "вращательных компонент" градиентного полного потока.

В свою очередь, из анализа (38) следует, что большая ось каждого из эллипсов вращения составляющих градиентного полного потока отклоняется относительно направления $(\pi_p - \Delta_g)/2$ на угол Δ_r :

$$\Delta_r = \pm(A_+^+ + A_-^- + \Phi^+ + \Phi^- - \pi_p)/2. \quad (39)$$

Из (39) следует, что $\Delta_r = 0$ в том случае, если справедливо следующее соотношение (см. (35)):

$$\Phi^+ + \Phi^- = -A_+^+ - A_-^- + \pi_p. \quad (40)$$

Следовательно, доказано, что при $\psi_+^+ = \psi_+^-$ большие оси всех четырех эллипсов вращения, формально соответствующих четырем вращательным составляющим градиентного полного потока с направлениями (33), будут иметь одинаковую ориентацию, определяемую выражением (37).

Значимость выражения (40) существенно расширяется в случае, когда вектор тангенциального напряжения ветра T_\pm почти не меняется по нормали к берегу или когда эти изменения малы по сравнению с изменениями глубины H . Тогда, в частности, задавая его направления Φ^\pm , в принципе можно определить базисные углы A_m^\pm на шельфе (если такие имеются) и наоборот. Следовательно, в этом случае увеличение градиентного полного потока будет определяться только направлениями Φ^\pm вектора тангенциального напряжения ветра, поскольку соответствующие им базисные углы A_m^\pm могут принадлежать, вообще говоря, произвольной точке шельфа.

Описанный выше механизм наложения однонаправленно вращающихся составляющих градиентного полного потока, принад-

лежащих разным составляющим вектора тангенциального напряжения ветра T_{\pm} , заметно усложняется при наложении на них еще и соответствующих им составляющих бароградиентного полного потока. Наиболее интересными будут, пожалуй, следующие ситуации:

А) а) $\psi_A^+ = \psi_+^+ = \psi_-^-, \psi_A^- = \psi_-^- = \psi_+^+$:
 $A_+^+ = \pi/4, A_-^- = q\pi/4,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = [\pm 1 - (1+q)/4]\pi;$

б) $\psi_A^+ = \psi_+^+ = \psi_-^-, \psi_A^- \pm \pi = \psi_-^- = \psi_+^+$:
 $A_+^+ = \pi/4, A_-^- = (q/4 \pm 1)\pi,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = -(1+q)\pi/4;$

в) $\psi_A^+ = \psi_+^+ = \psi_-^-, A_+^+ = \pi/4,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = -A_-^- + (\pm 1 - 1/4)\pi;$

г) $\psi_A^- = \psi_-^- = \psi_+^+; A_-^- = q\pi/4,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = -A_+^+ + (\pm 1 - q/4)\pi;$

д) $\psi_A^+ \pm \pi = \psi_+^+ = \psi_-^-, \psi_A^- \pm \pi = \psi_-^- = \psi_+^+$:
 $A_+^+ = (1/4 \pm 1)\pi, A_-^- = (q/4 \pm 1)\pi,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = [\pm 1 - (1+q)/4]\pi;$

е) $\psi_A^+ \pm \pi = \psi_+^+ = \psi_-^-, \psi_A^- = \psi_-^- = \psi_+^+$:
 $A_+^+ = (1/4 \pm 1)\pi, A_-^- = q\pi/4,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = -(1+q)\pi/4;$

ж) $\psi_A^+ \pm \pi = \psi_+^+ = \psi_-^-, A_+^+ = (1/4 \pm 1)\pi,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = -A_-^- - \pi/4;$

з) $\psi_A^- \pm \pi = \psi_-^- = \psi_+^+; A_-^- = (q/4 \pm 1)\pi,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = -A_+^+ - q\pi/4;$

Б) а) $\psi_A^- = \psi_+^+ = \psi_-^-, \psi_A^+ = \psi_+^+ = \psi_-^-$:
 $A_+^+ = (\pm 1 - 1/4)\pi - 2\Phi^+ + \Delta_d,$
 $A_-^- = (\pm 1 - q/4)\pi - 2\Phi^- - \Delta_d,$
 где $\Delta_d = \Delta_+ - q\Delta_-,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = [\pm 1 - (1+q)/4]\pi;$

б) $\psi_A^- = \psi_+^+ = \psi_-^-, \psi_A^+ \pm \pi = \psi_-^- = \psi_+^+$:
 $A_+^+ = -\pi/4 - 2\Phi^+ + \Delta_d,$
 $A_-^- = (\pm 1 - q/4)\pi - 2\Phi^- - \Delta_d,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = -(1+q)\pi/4;$

в) $\psi_A^- = \psi_+^+ = \psi_-^-$:
 $A_-^- = (\pm 1 - q/4)\pi - 2\Phi^- - \Delta_d,$
 $\Phi^+ - \Phi^- = -A_+^+ + \pi/4 + \Delta_d;$

г) $\psi_A^- = \psi_+^+ = \psi_-^-$:
 $A_+^+ = (\pm 1 - 1/4)\pi - 2\Phi^+ + \Delta_d,$
 $\Phi^+ - \Phi^- = A_-^- - \pi/4 + \Delta_d;$

д) $\psi_A^- \pm \pi = \psi_+^+ = \psi_-^-, \psi_A^+ \pm \pi = \psi_-^- = \psi_+^+$:
 $A_+^+ = -\pi/4 - 2\Phi^+ + \Delta_d,$
 $A_-^- = -q\pi/4 - 2\Phi^- - \Delta_d,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = [\pm 1 - (1+q)/4]\pi;$

е) $\psi_A^- \pm \pi = \psi_+^+ = \psi_-^-, \psi_A^+ = \psi_-^- = \psi_+^+$:
 $A_+^+ = (\pm 1 - 1/4)\pi - 2\Phi^+ + \Delta_d,$
 $A_-^- = (\pm 1 - q/4)\pi - 2\Phi^- - \Delta_d,$
 $\Phi^+ + \Phi^- = -(1+q)\pi/4;$

ж) $\psi_A^- \pm \pi = \psi_+^+ = \psi_-^-$:
 $A_-^- = -q\pi/4 - 2\Phi^- - \Delta_d,$
 $\Phi^+ - \Phi^- = -A_+^+ + (\pm 1 + q/4)\pi + \Delta_d;$

з) $\psi_A^- \pm \pi = \psi_-^- = \psi_+^+; A_+^+ = -\pi/4 - 2\Phi^+ + \Delta_d,$
 $\Phi^+ - \Phi^- = A_-^- - (\pm 1 + 1/4)\pi + \Delta_d.$

Таким образом, с помощью предложенной полуспектральной модели генерации скорости течений и уровня в баротропном море конечной глубины впервые удалось объяснить причины увеличения энергии их колебаний на отдельных частотах, которое связано исключительно с фазовыми характеристиками тангенциального напряжения ветра и связанного с ним горизонтального градиента атмосферного давления. При этом тангенциальному напряжению ветра принадлежит определяющая роль. Первая причина связана с наложением (вследствие совпадения начальных фаз) однонаправленно вращающихся составляющих скорости градиентного течения, обусловленных соответствующими вращательными компонентами вектора тангенциального напряжения ветра, а вторая – с наложением составляющей бароградиентной скорости течения с соответствующей составляющей градиентной скорости течения (или с этими составляющими в случае их совпадения).

В заключение следует отметить, что предмет дальнейших исследований должно стать включение и чисто дрейфовой скорости течения в предложенную в настоящей работе схему. С помощью ее в принципе можно установить все возможные начальные фазы возбуждающих сил, обуславливающие, по-видимому, наблюдаемые

пики в спектрах скорости ветровых течений, природу которых нельзя объяснить с помощью традиционных подходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gonella J.A. A rotary-component method for analyzing meteorological and oceanographic vector time series // *Deep-Sea Res.*, 1972. – 19, №12. – P. 833 – 846.
2. Фельзенбаум А.И. Динамика морских течений: Обзор // *Итоги науки и техники. Гидромеханика.* – М.: ВИНТИ, 1970. – С. 97 – 338.
3. Фельзенбаум А.И. К теории периодических течений // *Проблемы теории океанич. течений: Экспресс-информ.* – Киев: Наукова думка, 1966. – 4. – С. 5 – 23.
4. Озмидов Р.В. Обобщение теории нестационарных чисто дрейфовых течений Экмана на случай произвольного ветра // *Докл. АН СССР.* – 1959. – 128, №5. – С. 913 – 916.
5. Никифоров Е.Г. К теории нестационарных ветровых течений в условиях сильно переслоенного моря // *Тр. Арктич. и Антарктич. НИИ.* – 1961. – 210, вып. 1. – С. 141 – 163.
6. Беляев В.С. К теории периодических ветровых течений в однородном океане // *Изв. АН СССР. Физ. атмосфер. и океана.* – 1966. – 2, №4. – С. 414 – 422.
7. Хоролич Н.Г. Генерация чисто дрейфового и бароградиентного полных потоков в море взаимосвязанными полями ветра и атмосферного давления // *Экологич. безопасность прибрежн. и шельф. зон и комплексн. использование ресурсов шельфа: Сб. научн. тр.* – Вып.12 / НАН Украины, МГИ, ОФ ИнБЮМ. – Севастополь, 2004. – С. 429 – 443.
8. Хоролич Н.Г. Теоретическая модель по расчету временных спектров скоростей течений в однородном море конечной глубины // *Деп. рукопись № 368гм-Д84.* – ИЦ ВНИИГМИ-МЦД, 1984. – 38 с.
9. Хоролич Н.Г. Теоретическая модель для расчета временных спектров скоростей течений в однородном море с учетом горизонтального трения / *Деп. рукопись №637гм-Д87.* – ИЦ ВНИИГМИ-МЦД, 1987. – 21 с.
10. Хоролич Н.Г. Моделирование временных спектров скорости течений // *Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т. IV. Вып. 1. Черное море. Гидрометеорологические условия.* – СПб.: Гидрометеоиздат, 1991. – С.262 – 266.
11. Хоролич Н.Г. Пространственно-временная спектральная модель для расчета мезомасштабных течений на шельфе с одномерной топографией дна / *Деп. рукопись №369гм-Д84.* – ИЦ ВНИИГМИ-МЦД, 1984. – 45 с.
12. Хоролич Н.Г. О расчете пространственно-временных спектров скоростей ветровых течений на шельфе с учетом трения / *Деп. рукопись № 638гм-Д87.* – ИЦ ВНИИГМИ-МЦД, 1987. – 31 с.
13. Хоролич Н.Г. О построении пространственно-временной спектральной модели для расчета течений на шельфе с учетом трения // *Тез. докл. III съезд океанологов. Физика и химия океана.* – Л., 1987. – С. 179 – 181.
14. Хоролич Н.Г. Полуспектральная модель генерации скорости течений и уровня на шельфе взаимосвязанными полями ветра и атмосферного давления // *Экологич. безопасность прибрежн. и шельф. зон и комплексн. использование ресурсов шельфа: Сб. научн. тр.* – Вып.10 / НАН Украины, МГИ, ОФ ИнБЮМ. – Севастополь, 2004. – С. 278 – 290.
15. Хоролич Н.Г. Генерация чисто дрейфового, бароградиентного и градиентного полных потоков в море взаимосвязанными полями ветра и атмосферного давления // *Соврем. сост. экосистем Черного и Азовского морей. Междунар. научн. конф.*, 13 – 16 сент. 2005 г., Крым, Донузлав. Тезисы докл. / *Океанолог. центр НАНУ, МГИ НАНУ, МОНУ, Таврич. нац. ун-т, Фонд Москва-Крым.* – Крым, Донузлав, 2005. – С. 110 – 111.
16. Иванов В.Ф. Влияние вязкости и β -эффекта на генерацию длинных волн в океане атмосферными волнами // *Теоретические и экспериментальные исследования поверхностных и внутренних волн.* – МГИ АН УССР: Севастополь, 1980. – С. 99 – 112.
17. Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений. – М.: Наука, 1978. – 126 с.
18. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 590 с.