МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Анд.А. Букатов

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

Рассмотрены длинные гравитационные волны конечной амплитуды в двухслойной жидкости с учетом дисперсии. Получены аналитические выражения для определения возмущений, обусловленных внутренними волнами на свободной поверхности и границы раздела слоев с точностью до величины второго порядка малости.

Кроме видимых поверхностных волн в неоднородной жидкости возникают и внутренние волны, обусловленные плотностной стратификацией. Они проявляются и на свободной поверхности, внося свой вклад в формирование ее волнового возмущения. В настоящей работе рассматриваются длинные внутренние волны конечной амплитуды в двухслойной жидкости со скачком плотности с учетом дисперсии.

Постановка задачи. В работе [1] приведена полная модель процесса длинных поверхностных волн в слое жидкости с неровным дном. Используется безразмерная форма постановки задачи, а выражения для потенциала скорости принимаются в виде степенного ряда по глубине. Условия задачи удовлетворяются с точностью до главных членов представления искомых величин по дисперсному параметру. В результате получается система уравнений в частных производных относительно ординаты свободной поверхности и первого члена разложения горизонтальной скорости. Все остальные параметры, характеризующие закономерности длинных волн и их взаимодействие с преградами, сводятся к указанным функциям. Используя основные методы этой работы, рассмотрим волновое движение двухслойной, несжимаемой, идеальной тяжелой жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью, а снизу- твердым непроницаемым дном. Жидкость состоит из 2 несмешивающихся слоев разной постоянной плотности. Движение в каждом слое безвихревое. Атмосферное давление на верхней свободной границе считается постоянным. Плоскость (X,Y) системы координат (X,Y,Z) совпадает с невозмущенной поверхностью раздела слоев, толщина которых H_1 и H_2. Ось Z направлена вертикально вверх. Уравнение $z=\zeta(x, y, z)+$ $+H_1(x, y)$ задает свободную поверхность, а уравнение $z=\eta(x, y, z)$ – поверхность раздела слоев. Поверхность дна задается уравнением $z=-H_2(x, y)$. Безвихревое движение жидкости описывается с помощью потенциалов $\varphi=\varphi(x, y, z, t)$ и $\phi=\phi(x, y, z, t)$ для верхнего и нижнего слоев соответственно. Система уравнений:

$$\begin{gathered}
\Delta\varphi = 0,\ \Delta\phi = 0,\ \zeta_t + \nabla\zeta\nabla\varphi = \varphi_z \\
\varphi_t + \zeta + 1/2\,|\nabla\varphi|^2 + 1/2\varphi^2_z = 0 \\
p_1 = p_2, \quad z = \eta(x, y, t) \\
\eta_t + \nabla\eta\nabla\phi = \phi_z, \quad z = \eta(x, y, t) \\
\eta_t + \nabla\eta\nabla\varphi = \varphi_z, \quad z = \eta(x, y, t) \\
\nabla H_2\nabla\phi + \phi_z = 0, \quad z = -H_2(x, y)
\end{gathered} \tag{1}$$

описывает рассматриваемые волновые процессы.

Здесь $\mu = H_{\bullet}/l_{\bullet}$, $H_{\bullet}$, $l_{\bullet}$ - характерные вертикальный и горизонтальный размеры.

Вывод основных уравнений. Используем представление для потенциалов скорости в виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(x, y, t, \mu)(z - H_1)^k$$

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(x, y, t, \mu)(z + H_1)^k$$

Получая разложения для потенциалов скорости с точности до второй степени μ, подставляем их в уравнения системы (1), приведенной к безразмерному виду. Удерживая члены при μ в степени не выше первой получим систему (2) четырех дифференциальных уравнений, описывающую нелинейные волновые процессы в двухслойной жидкости со свободной поверхностью:

$$\begin{aligned}
&\alpha_t + \zeta + \frac{1}{2}(\nabla\alpha)^2 = -\mu\Big\{(z - H_1)\big[\zeta_{tt} + \nabla\zeta_t\nabla\alpha + \\
&+ \nabla\zeta\nabla\alpha_t + \nabla\alpha\big(\Delta\alpha\nabla H_1 + \nabla(\zeta_t + \nabla\zeta\nabla\alpha)\big) - \\
&- \Delta\alpha(\zeta_t + \nabla\zeta\nabla\alpha)\big] - \nabla\alpha\nabla H_1(\zeta_t + \nabla\zeta\nabla\alpha) - \\
&- \frac{(z - H_1)^2}{2}\cdot\left[\Delta\alpha_t + \nabla\alpha\nabla\Delta\alpha - (\Delta\alpha)^2\right] + \\
&+ \frac{1}{2}(\zeta_t + \nabla\zeta\nabla\alpha)^2\Big\},\ z = \zeta + H_1;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma\cdot\Big\{\eta+\alpha_t+\frac{(\nabla\alpha)^2}{2}+\mu\Big[\frac{1}{2}(\zeta_t+\nabla\zeta\nabla\alpha)^2-\\
&-\nabla\alpha\nabla H_1(\zeta_t+\nabla\zeta\nabla\alpha)+\\
&+(z-H_1)(\nabla\alpha\Delta\alpha\nabla H_1+\nabla\alpha\nabla(\zeta_t+\nabla\zeta\nabla\alpha)+\\
&+\zeta_{tt}+\nabla\zeta_t\nabla\alpha+\nabla\zeta\nabla\alpha_t-\Delta\alpha(\zeta_{tt}+\nabla\zeta\nabla\alpha))+\\
&+\frac{(z-H_1)^2}{2}\left((\Delta\alpha)^2-\Delta\alpha_t-\nabla\alpha\nabla\Delta\alpha\right)\Big]\Big\}=\eta+\\
&+\beta_t+\frac{(\nabla\beta)^2}{2}+\mu\big[-(\nabla\beta)^2(\nabla H_2)^2+(z+H_2)\cdot\\
&\cdot\nabla H_2\nabla\beta\Delta\beta-\nabla H_2\nabla\beta_t-\nabla\beta\nabla(\nabla H_2\nabla\beta)-\\
&-\nabla\beta\Delta\beta\nabla H_2)+\frac{(z+H_2)^2}{2}\cdot\\
&\cdot\left((\Delta\beta)^2-\Delta\beta_t-\nabla\beta\nabla\Delta\beta\right)\big]\ ; \qquad (2)\\
&\eta_t+\nabla\eta\nabla\beta+\nabla H_2\nabla\beta+\Delta\beta(z+H_2)=\\
&=\mu\{\nabla\eta\nabla(\nabla H_2\nabla\beta)+\nabla\eta(\nabla H_2)^2\nabla\beta+\\
&+|\nabla H_2|^2(\nabla H_2\nabla\beta)+\big[\nabla\eta\Delta\beta\nabla H_2+|\nabla H_2|^2\Delta\beta+\\
&+2\nabla H_2\nabla(\nabla H_2\nabla\beta)+(\nabla H_2\nabla\beta)\Delta H_2\big]+\big[\nabla\eta\nabla\Delta\beta+\\
&\Delta(\nabla H_2\nabla\beta)+2\nabla H_2\nabla(\nabla\beta)+\Delta\beta\Delta H_2\big]\cdot\frac{(z+H_2)^2}{2}+\\
&\Delta^2\beta(z+H_2)^3/6\},\ \ z=\eta;\\
&\eta_t+\nabla\eta\nabla\alpha-\zeta_t-\nabla\zeta\nabla\alpha+\Delta\alpha(z-H_1)=\\
&=\mu\{\nabla\eta\nabla H_1(\zeta_t+\nabla\zeta\nabla\alpha)-\nabla\zeta\nabla H_1(\zeta_t+\nabla\zeta\nabla\alpha)+\\
&+(z-H_1)[-\nabla\eta\nabla(\zeta_t+\nabla\zeta\nabla\alpha)-\Delta\alpha\nabla\eta\nabla H_1+\\
&+\Delta\alpha(\nabla H_1)^2+2\nabla H_1(\nabla\zeta_t+\nabla(\nabla\zeta\nabla\alpha))+\\
&\Delta H_1(\zeta_t+\nabla\zeta\nabla\alpha)]-\frac{(z-H_1)^2}{2}[-\nabla\eta\nabla\Delta\alpha+\Delta\zeta_t+\\
&+\Delta(\nabla\zeta\nabla\alpha+2\nabla H_1\nabla\Delta\alpha+\Delta\alpha\Delta H_1)]+\\
&+\Delta^2\alpha(z-H_1)^3/6\},\ z=\eta,
\end{aligned}
$$

где $\gamma=\rho_1/\rho_2$, ρ_1 и ρ_2 – плотность жидкости в верхнем и нижнем слоях соответственно. Аналитическое решение. Рассмотрим линейный вариант (2) при $H_2=\mathrm{const}$. Представляя искомые функции α, β, ζ, η в виде $f=f_0e^{i(\kappa x-\omega t)}$ и подставляя в линейную систему, получим выражения для ζ_0, η_0, β_0

$$
\eta_0=\frac{i\alpha}{\omega}\left\{\omega^2-\kappa^2H_1+\frac{\mu\kappa^2}{6}\left(3H_1^2\omega-\kappa^2H_1^2\right)\right\}
$$

$$
\beta_0=\frac{\alpha_0\left(\omega^2-\kappa^2H_1+\mu\kappa^2\left(3H_1^2\omega^2-\kappa^2H_1^3\right)/6\right)}{\kappa^2H_2\left(1+H_2^2\kappa^2\mu/6\right)}
$$

Дисперсионное соотношение:

$$
\begin{aligned}
&-\omega^4+\omega^2\kappa^2H-(1-\gamma)\kappa^4H_2H_1+\frac{\mu\kappa^2}{6}\cdot\\
&\cdot\{-3\omega^4\left(H_1^2+H_2^2+2\gamma H_2H_1\right)+\omega^2\kappa^2H^3-\\
&-(1-\gamma)\kappa^4H_2H_1\left(H_1^2+H_2^2\right)\}=0. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Если положить $\mu=0$, то решая это биквадратное уравнение получим

$$
\omega^2=\frac{\kappa^2H}{2}\left(1\pm\left(1-\frac{2(1-\gamma)H_2H_1}{H^2}\right)\right)
$$

Для океанских условий разность плотностей слоев, обусловленная температурой и соленостью, довольно незначительна и их отношение близко к 1.Обычно $(1-\gamma)$ имеет порядок 10^{-3}.

Для внутренних и поверхностных волн получим выражения, определяющие их фазовые скорости.

$$
\frac{\omega_1^2}{\kappa_1^2}=\frac{(1-\gamma)H_1H_2}{H};\ \frac{\omega_2^2}{\kappa_2^2}=H\left(1-\frac{(1-\gamma)H_2H_1}{H^2}\right).
$$

В случае $\mu\neq0$, перепишем уравнение (3) в виде

$$
\begin{aligned}
&\omega^4-\omega^2\kappa^2H\left\{1-\frac{\mu\kappa^2}{3}\left(H^2-3H_1H_2(1-\gamma)\right)\right\}+\\
&+(1-\gamma)\kappa^4H_2H_1\left(1-\frac{\mu\kappa^2}{3}\left(H_1^2+H_2^3+\right.\right.\\
&\left.\left.+3\gamma H_2H_1\right)\right)=0
\end{aligned}
$$

Отсюда, для поверхностных волн

$$
\begin{aligned}
&\omega_1^2=\kappa^2H\left(1-\frac{(1-\gamma)H_1H_2}{H^2}\right)-\frac{\mu\kappa^4}{3H}\{H^4-\\
&(1-\gamma)H_1H_2\left(3H^2+H_1H_2(4-3\gamma)\right)+3(1-\gamma)^2\cdot\\
&\cdot H_1^2H_2^2\}
\end{aligned}
$$

Или с учетом малости $\mu(1-\gamma)$, $(1-\gamma)^2$

$$
\omega_1^2=\kappa^2H\left(1-\frac{(1-\gamma)H_1H_2}{H^2}\right)-\frac{\mu\kappa^4}{3}H^3
$$

Коэффициент при μ зависит только от общей глубины бассейна, независимо от толщины слоев. Для внутренних волн получим

$$
\omega_2^2=\frac{\kappa^2(1-\gamma)H_1H_2}{H}-\frac{\mu\kappa^4}{3}(1-\gamma)H_1H_2H
$$

Следовательно, для внутренней волны влияние члена с μ незначительно.

Найдем отношение амплитуды проявления внутренней волны на свободной поверхности к ее амплитуде на границе раздела слоев. Используя выражения для ζ_0, η_0, можно записать:

$$
\frac{\varsigma}{\eta}=\frac{\omega^2}{\omega^2-\kappa^2H_1+\mu\kappa^2\left(3H_1^2\omega^2-\kappa^2H_1^3\right)/6}
$$

Подставляя сюда значение ω для внутренней волны, получим:

$$\frac{\varsigma}{\eta}=-\frac{(1-\gamma)}{\gamma+H_1/H_2}\left(1-\frac{\mu\kappa^2}{6}\frac{H_1^2 H}{\gamma H_2+H_1}\right)$$

Аналогичным образом получим отношение амплитуды поверхностной волны к величине ее амплитуды на поверхности скачка плотности.

$$\frac{\varsigma}{\eta}=\frac{H^2-(1-\gamma)H_2H_1}{H_2(H_2+\gamma H_1)}-\frac{\mu\kappa^2 H}{H_2(H_2+\gamma H_1)}\left\{\frac{H^3}{3}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(H^2-(1-\gamma)H_2H_1\right)\left(H_1^2(3H-H_1)-2H^3\right)}{6H_2(H_2+\gamma H_1)}\right\}$$

Перепишем систему (2) для плоского случая и горизонтального дна, полагая $u=\alpha_x$, $v=\beta_x$. Решение этой системы будем искать в виде бегущей волны установившегося вида: $\xi=x-ct$. Тогда:

$$\frac{d}{d\xi}=\frac{d}{dx},\quad \frac{d}{dt}=-c\frac{d}{d\xi},$$

где с – фазовая скорость. Решение строим в виде

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}u_i\varepsilon^i,\ v=\sum_{i=1}^{\infty}v_i\varepsilon^i,\ \eta=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\varepsilon^i,$$
$$\varsigma=\sum_{i=1}^{\infty}\varsigma_i\varepsilon^i,\quad c=c_0+\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varepsilon_i$$

где ε малый амплитудный параметр. Входя этим представлением в систему, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Для первого приближения получаем:

$$-c_0u_{1\xi}+\varsigma_{1\xi}=0,\ z=\varsigma+H_1$$
$$-c_0v_{1\xi}+c_0\gamma u_{1\xi}+\eta_{1\xi}(1-\gamma)=\mu\left(-c_0v_{1\xi\xi\xi}H_2^2-\right.$$
$$\left.-2H_1\gamma c_0^2\varsigma_{1\xi\xi\xi}+\gamma H_1^2c_0u_{1\xi\xi\xi}\right)/2, z=\eta$$
$$-c_0\eta_{1\xi}+v_{1\xi}H_2=\mu v_{1\xi\xi\xi}H_2^3/6,\ z=\eta \qquad (4)$$
$$-c_0\eta_{1\xi}-u_{1\xi}H_1+c_0\varsigma_{1\xi}=$$
$$=\mu\left\{-c_0\varsigma_{1\xi\xi\xi}H_1^2/2+u_{1\xi\xi\xi}H_1^3/6\right\}, z=\eta.$$

Аналогично для второго и последующих приближений. Используя выражение для фазовой скорости внутренней волны $c_0^2=H_1H_2(1-\gamma)/H$ и полагая $u_1=a_1\cos\xi$, $v_1=b_1\cos\xi$, получим из системы (4)

$$\varsigma_1=c_0a_1\cos\xi$$
$$\eta_1=\frac{a_1}{c_0}\left\{c_0^2-H_1+H_1^2\frac{\mu}{6}\left(3c_0^2-H_1\right)\right\}\cos\xi$$
$$v_1=\frac{a_1}{H_2}\left\{c_0^2-H_1+\frac{\mu}{6}H_1\left(H_2^2-H_1^2\right)\right\}\cos\xi$$

Полученный результат подставляем в правую часть системы для второго приближения, полагая u_2, v_2 в виде $u_2=a_2\cos2\xi$, $v_2=b_2\cos2\xi$ последовательно находим ζ_2, η_2, v_2, a_2. В конечном итоге, получим решение нелинейной системы как сумму последовательных приближений:

$$u=\varepsilon a_1\cos\xi-\varepsilon^2\frac{3}{8}\frac{a_1^2(A+\mu B/3)}{c_0\mu H_2H_1D}\cos2\xi+\ldots$$
$$v=\varepsilon\frac{a_1}{H_2}\left\{c_0^2-H_1+\frac{\mu}{6}H_1\left(H_2^2-H_1^2\right)\right\}\cos\xi+$$
$$+\varepsilon^2\frac{a_1^2}{8c_0\mu H_2^2H_1D}\left\{3A\left(H_1-c_0^2\right)+\right.$$
$$\left.+\mu H_1\left(2A\left(H_1^2-H_2^2\right)+B-4H_1^2D\right)\right\}\cos2\xi+\ldots$$
$$\eta=\varepsilon\frac{a_1}{c_0}\left(c_0^2-H_1-\frac{\mu H_1^3}{6}\right)\cos\xi+\frac{\varepsilon^2a_1^2}{8\mu c_0^2H_2H_1D}\cdot$$
$$\left\{3A\left(H_1-c_0^2\right)+\mu H_1(2AH_1+B-\right.$$
$$\left.-4H_1H_2D)\right\}\cos2\xi+\ldots$$
$$\zeta=\varepsilon c_0a_1\cos\xi-\frac{\varepsilon^2a_1^2}{8\mu H_2H_1D}\left\{3A+\mu(B+\right.$$
$$\left.+2H_2H_1D)\right\}\cos2\xi+\ldots,$$

где $A=3H_1^2-H_2(\gamma+2)-6H_1^2H_2(1-\gamma)/H$,

$$B=5H_1H_2^2+3H_1^3+8H_2^3,$$
$$D=2H_2^2+H_1H_2(3\gamma-1).$$

Полученные выражения представляют собой возмущения, обусловленные внутренней волной на свободной поверхности и на границе раздела слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алешков Ю.З. Полная модель процесса распространения длинных волн и их взаимодействия с вертикальной стенкой // Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа. – 1985. – №3. – С.173–176.

2. Кочин Н.Е. Точное определение установившихся волн конечной амплитуды на поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины. – Собр. соч. 2,–М.-Л., 1949.–С.43–79.

3. Овсянников Л.В. Модели двухслойной «мелкой воды» // Прикладная механика и техническая физика. – 1979, №2. – С.3–14.