ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНОВЫХ ГАРМОНИК КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Ант.А. Букатов

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ocean@alpha.mhi.iuf.net

Методом многих масштабов получены асимптотические разложения для возвышения свободной поверхности и потенциала скорости волновых возмущений в слое однородной жидкости при нелинейном взаимодействии капиллярно-гравитационных волн первой и второй гармоник. Они получены с точностью до величин третьего порядка малости с учетом изменений потенциала скорости на свободной поверхности за счет деформаций волнового профиля.

Введение. В линейной постановке влияние поверхностного натяжения на волновые возмущения рассмотрено [1-4]. Исследование капиллярно-гравитационных прогрессивных поверхностных волн конечной амплитуды выполнено в [5] без учета изменений потенциала скорости движения жидких частиц на свободной поверхности при ее деформации. Оценка влияния таких изменений на характеристики нелинейных периодических бегущих волн дана в работе [6].

В настоящей работе методом многих масштабов получено асимптотическое разложение до величин третьего порядка малости для возвышения свободной поверхности и потенциала скорости движения жидких частиц волнового возмущения, формируемого при нелинейном взаимодействии периодических бегущих капиллярно-гравитационных волн первой и второй гармоник с учетом изменений потенциала скорости на свободной поверхности при ее деформации.

Постановка задачи. Рассмотрим однородную идеальную несжимаемую жидкость, заполняющую неограниченный бассейн конечной глубины H, находящуюся под влиянием капиллярно-гравитационных сил. Тогда в предположении потенциальности движения жидкости в безразмерных переменных $x = kx_1$, $z = kz_1$, $t = \sqrt{kg}\,t_1$, где k - волновое число, g – ускорение силы тяжести, t – время., задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \ -\infty < x < \infty, \quad -H < z < \zeta \qquad (1)$$

с граничными условиями на поверхности ($z = \zeta$)

$$\zeta - \varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_x^2 + \varphi_z^2\right) - \alpha_1 k^2 \zeta_{xx}\left(1 + \zeta_x^2\right)^{-3/2} = 0 \qquad (2)$$

и на дне бассейна ($z = -H$)

$$\varphi_z = 0. \qquad (3)$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x), \ \zeta_t = 0. \qquad (4)$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha/(\rho g)$, ρ – плотность жидкости, α – коэффициент поверхностного натяжения. Потенциал скорости φ и возвышение поверхности бассейна ζ при $z = \zeta$ связаны кинематическим условием

$$\zeta_t - \zeta_x\varphi_x + \varphi_z = 0. \qquad (5)$$

Уравнения для нелинейных приближений. Решение задачи (1)-(5) найдем методом многих масштабов [7], позволяющим получить для ζ и φ равномерно пригодные разложения. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, где ε - малое, но конечное, и предположим что

$$\zeta = \varepsilon\zeta_0(x,t), \ \varphi = \varepsilon\varphi_0(x,z,t), \ f = \varepsilon f_0(x), \qquad (6)$$
$$\zeta_0 = \zeta_1 + \varepsilon\zeta_2 + \varepsilon^2\zeta_3 + O(\varepsilon^3),$$
$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_3 + O(\varepsilon^2),$$
$$f_0 = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3).$$

Подставив φ из (6) в (1) и (3), с точностью до величин третьего порядка малости получим

$$\varepsilon\Delta\varphi_1 + \varepsilon^2\Delta\varphi_2 + \varepsilon^3\Delta\varphi_3 = 0,$$
$$\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \varepsilon^3\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = 0. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь динамическое (2), кинематическое (5) и начальное (4) условия. В силу малости ε представим потенциал скорости $\varphi(k, z, t)$ на поверхности жидкости $z = \varepsilon\zeta_0$ в виде

$$\varphi(x,t,\varepsilon\zeta_0) = \varphi(x,t,0) + \varepsilon\zeta_0\varphi_z(x,t,0) +$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta_0^2\varphi_{zz}(x,t,0) + \ldots \qquad (8)$$

Подставим $\zeta = \varepsilon\zeta_0$, $f = \varepsilon f_0$, $\varphi(x, t, \varepsilon\zeta_0)$ в условия (2), (3), (4), (5), имея в виду при этом, что по правилу дифференцирования сложной функции частная производная по времени определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$$

и учитывая зависимость ζ_0 от x и t в (8).

Тогда, собрав коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравняв их нулю, из (2) – (5), (7) найдем

$$\Delta\varphi_n=0,\ -\infty<x<\infty,\ -H<z<0,\quad(9)$$

$$\zeta_n-\frac{\partial\varphi_n}{\partial T_0}-\alpha_1 k^2\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial x^2}=F_n^*,\ z=0,\quad(10)$$

$$\frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=L_n^*,\ z=0,\quad(11)$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=0,\ z=-H,\quad(12)$$

$$\zeta_n=f_n(x),\ \frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0}=G_n,\ t=0.\quad(13)$$

Здесь

$$F_n^*=F_n+F_n^0,\quad L_n^*=L_n+L_n^0,$$

$$F_1=F_1^0=L_1=L_1^0=L_2^0=G_1=0,$$

$$F_2=\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0\partial z}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$L_2=\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}-\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2},\ G_2=-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1},$$

$$G_3=-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1},$$

$$F_3=\zeta_1\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_1\partial z}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial T_0\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\zeta_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0\partial z}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial T_0\partial z^2}-\frac{3}{2}\alpha_1 k^2\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2,$$

$$L_3=\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial z}\right)-\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}-\zeta_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1}-\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^3},$$

$$F_2^0=\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z},\ L_3^0=-\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z},$$

$$F_3^0=\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\zeta_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}.$$

Отметим, что слагаемые F_2^0, F_3^0, L_3^0, входящие в правые части уравнений (10), (11), обусловлены учетом зависимости ζ_0 от x и t в (8) при выводе поверхностных граничных условий для нелинейных приближений [6]. Что касается выражений $F_{2,3}$, $L_{2,3}$, $G_{2,3}$, то они аналогичны полученным в [5]. Из (10), (11) видно, что зависимость ζ_0 от x и t в (8) не проявляется в выражениях для приближения порядка ε ($F_1^0=L_1^0=0$). В приближениях же ε^2 такое слагаемое (F_2^0) входит только в динамическое, а в приближении ε^3 – в динамическое (F_3^0) и кинематическое (L_3^0) условия.

Выражения для потенциала скорости и возвышения поверхности жидкости. Уравнения, граничные и начальные условия для нелинейных приближений (9)-(13) получены в общем случае неустановившихся возмущений конечной амплитуды. Остановимся на рассмотрении бегущих периодических волн, задавая $f_n(x)$ в соответствующем виде. Выберем первое приближение ($n=1$) возвышения поверхности бассейна в форме

$$\zeta_1=\cos\theta+a_1\cos 2\theta,$$
$$\theta=x+\tau T_0+\beta_1(T_1,T_2).\quad(14)$$

где a_1 постоянная порядка единицы, а $\beta_1(0)=0$.

Удовлетворяя условию на дне и учитывая взаимосвязь волновых характеристик через граничные условия (10), (11), запишем

$$\varphi_1=\tau\left[\frac{\cosh(z+H)}{\sinh H}\sin\theta+a_1\frac{\cosh 2(z+H)}{\sinh 2H}\sin 2\theta\right],\quad(15)$$
$$\tau^2=\left(1+\alpha_1 k^2\tanh H\right).$$

Амплитуду a_1 и фазовый сдвиг $\beta_1(T_1,T_2)$ определим из последующих приближений. Подставим ζ_1, φ_1 из (14), (15) в правые части динамического (10) и кинематического (11) граничных условий для второго приближения и решив задачу при $n=2$ с учетом требования отсутствия первой и второй гармоник в частном решении, получим

$$\zeta_2=a_2\cos 2\theta+\sum_{n=3}^{4}a_{2n}\cos n\theta,\quad(16)$$

$$\varphi_2 = b_{20}t + \tau\sum_{n=1}^{4} b_{2n}\cosh n(z+H)\sinh^{-1} nH \sin n\theta \quad (17)$$

Здесь

$$a_1 = \pm\left(\frac{1}{4}\frac{4\coth H + \left(\coth^2 H - 3\right)\tanh 2H}{4\coth 2H + \coth H + \tanh H}\right)^{1/2} \quad (18)$$

$$\beta = \sigma_1 T_1 + \beta_2(T_2),$$

$$\sigma_1 = \frac{a_1\tau}{4}\left(4\coth 2H + \coth H + \tanh H\right),$$

$$b_{20} = \frac{1}{4}\tau^2\left(\coth^2 H + 1\right) + a_1^2\tau^2\left(\coth^2 2H + 1\right),$$

$$\mu_n = \left(1 + n^2\alpha_1 k^2\right)\tanh nH - n\tau^2,\ n = 3, 4, 5, 6;$$

$$b_{21} = -\frac{1}{2}a_1\left(2\coth 2H + \coth H\right) + \frac{\sigma_1}{\tau},$$

$$b_{22} = a_2 + a_0,$$

$$b_{23} = a_{23} - \frac{1}{2}a_1\left(2\coth 2H + \coth H\right),$$

$$b_{24} = a_{24} - a_1^2\coth 2H,$$

$$a_{23} = -\frac{1}{2}a_1\tau\left(3\left(2\coth 2H + \coth H\right) + \right.$$
$$\left.\left(2\coth H\coth 2H - 11\right)\tanh 3H\right)\mu_3^{-1},$$

$$a_{24} = -a_1^2\tau^2\left(4\coth 2H + \right.$$
$$\left. + \left(\coth^2 2H - 5\right)\tanh 4H\right)\mu_4^{-1},$$

$$a_0 = a_1\frac{\sigma_1}{\tau} - \frac{1}{2}\coth H,$$

а выражения для a_2 и β_2 определим из третьего приближения. Выражения для ζ_1, φ_1 из (14), (15) и ζ_2, φ_2 из (16), (17) определяют правые части динамического (10) и кинематического (11) условий при $n = 3$. Исключив из них слагаемые, порождающие секулярность, найдем

$$a_2 = \frac{w_1 - w_2}{\eta_3 - \eta_4},\ w_1 = -\tau\left(q_1\tanh H + \gamma_1\right),$$

$$w_2 = -\frac{\tau}{2a_1}\left(q_2\tanh 2H + \gamma_2\right),$$

$$\eta_3 = \frac{\tau}{2}\left(3\tanh H - \coth H - 4\coth 2H\right),$$

$$\eta_4 = \frac{2\sigma_1}{a_1},\ \beta_2 = \sigma_2 T_2,\ \sigma_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 - a_2\eta_3\right),$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}b_{21}a_1\coth H - \left(a_0 + a_1 a_{23}\right)\coth 2H -$$
$$-\frac{3}{2}a_1 b_{23}\coth 3H - \frac{33}{4}a_1^2 - \frac{9}{8},$$

$$\gamma_2 = -\left(b_{21} + a_{23}\right)\coth H - 2a_{24}a_1\coth 2H -$$
$$-3b_{23}\coth 3H - 4b_{24}a_1\coth 4H - 9a_1^3 - 6a_1,$$

$$q_1 = \sum_1^4 q_{1n},\ q_2 = \sum_1^4 q_{2n}, \quad (19)$$

$$q_{11} = a_1\left(\frac{5}{2}\frac{\sigma_1}{\tau} - \frac{1}{2}b_{21} + 2a_{23}\right) +$$
$$+ a_0 + \frac{\alpha_1}{\tau^2}\left(\frac{3}{8}k^2 + 3a_1^2k^2\right),$$

$$q_{12} = \left(\frac{\sigma_1}{\tau}b_{21} - \frac{7}{4}a_1^2 - \frac{5}{8}\right)\coth H - 5a_1^2\coth 2H,$$

$$q_{13} = a_1 b_{23}\left(\frac{3}{2} - 3\coth 2H\coth 3H\right) - ,$$
$$-\left(a_0 + a_1 b_{21}\right)\coth H\coth 2H$$

$$q_{14} = -2a_2 - a_0 - a_1\left(b_{21} + 2\frac{\sigma_1}{\tau} + 3b_{23} + 3a_{23}\right) -$$
$$-2a_1^2\left(2\coth 2H - \coth H\right),$$

$$q_{21} = \left(2a_0\frac{\sigma_1}{\tau} - 5a_1^3 + a_1\right)\coth 2H - \frac{5}{2}a_1\coth H,$$

$$q_{22} = 4a_1 b_{24}\left(1 - \coth 4H\coth 2H\right) +$$
$$+ b_{21}\left(1 - \frac{1}{2}\coth^2 H\right) +$$
$$+ \frac{3}{2}b_{23}\left(2 - \coth H\coth 3H\right),$$

$$q_{23} = a_1\left[2a_{24} + \frac{\alpha_1}{\tau^2}\left(3k^2 + 6a_1^2k^2\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1}{\tau} + a_{23}\right),$$

$$q_{24} = \frac{1}{2}\left(b_{21} + \frac{\sigma_1}{\tau}\right) - \frac{3}{2}\left(b_{23} + a_{23}\right) -$$
$$-a_1\left[\frac{1}{2}\coth H - \coth 2H + 4\left(b_{24} + a_{24}\right)\right].$$

Тогда решение задачи для третьего приближения ($n = 3$) имеет вид

$$\zeta_3 = a_3\cos 2\theta + \sum_{n=3}^{6} a_{3n}\cos n\theta, \quad (20)$$

$$\varphi_3 = \tau^2 b_{31}t + \tau\sum_{n=2}^{6} b_{3n}\frac{\cosh n(z+H)}{n\sinh nH}\sin n\theta, \quad (21)$$

где

$$a_{3n} = \tau^2\left(q_n\tanh H + \gamma_n\right)\mu_n^{-1},\ n = 3, 4, 5, 6;$$

$$b_{32} = 2a_3 + 2\frac{\sigma_1}{\tau}\left(a_1 + a_2\right) + \gamma_2,$$

$$b_{3n} = \frac{\tau\left(na_{3n} + \gamma_n\right)}{n\sinh H},\ n = 3, 4, 5, 6;$$

$$b_{31} = b_{30} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_1}{\tau}\left(1 + 4a_1^2\right) - b_{21}\coth^2 H\right] -$$

$$-2a_1\left[b_{22}\coth^2 2H+\frac{5}{8}\coth H+\frac{1}{4}\coth 2H-a_2\right],$$

$$b_{30}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_1}{\tau}\left(1+4a_1^2\right)+b_{21}\right]-$$

$$-a_1\left(2a_2+2b_{22}-\frac{3}{4}\coth H+\frac{3}{2}\coth 2H\right),$$

$$q_3=\sum_{n=1}^{4}q_{3n},\ q_4=\sum_{n=1}^{3}q_{4n},\ q_5=\sum_{n=1}^{3}q_{5n},$$

$$q_6=a_1\left[4b_{24}(3-\coth 2H\coth 4H)+2a_{24}\right]+$$

$$+a_1^3\left(\coth 2H-6\frac{\alpha_1 k^2}{\tau^2}\right)+q_{61},$$

$$q_{61}=4a_1(b_{24}+a_{24}),$$

$$q_{31}=a_2\left(\frac{7}{2}-\coth H\coth 2H\right)+$$

$$+3\frac{\sigma_1}{\tau}b_{23}\coth 3H-\frac{3}{2}\frac{\alpha_1 k}{\tau}\left(\frac{1}{4}k+3k\,a_1^2\right),$$

$$q_{32}=a_1\left[b_{21}\left(\frac{3}{2}-\coth H\coth 2H\right)+\frac{5}{2}\frac{\sigma_1}{\tau}\right]-$$

$$-a_1^2\left(\frac{11}{8}\coth H-\frac{1}{2}\coth 2H\right),$$

$$q_{33}=a_0(3-\coth H\coth 2H)+\frac{1}{2}a_{24}+$$

$$+2b_{24}(3-\coth 4H\coth H)+\frac{1}{8}\coth H,$$

$$q_{34}=a_0+a_1\left(b_{21}+2\frac{\sigma_1}{\tau}\right)+2a_2-2b_{24}-$$

$$-2a_{24}-3a_1^2\left(\frac{1}{2}\coth H-\coth 2H\right),$$

$$q_{41}=\frac{3}{2}b_{23}(4-\coth 3H\coth H)+$$

$$+2\frac{\sigma_1}{\tau}\left(2b_{24}\coth 4H+a_1^2\right)-3\frac{\alpha_1 k^2}{\tau^2}a_1,$$

$$q_{42}=2a_1\left[a_2\left(3-\coth^2 2H\right)+a_0\left(2-\coth^2 2H\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}\coth 2H-\frac{1}{8}\coth H\right]+\frac{1}{2}a_{23},$$

$$q_{43}=\frac{3}{2}(b_{23}+a_{23})+2a_1^2\frac{\sigma_1}{\tau}+$$

$$+a_1\left[4a_2+2a_0-\frac{1}{4}\coth H+\frac{1}{2}\coth 2H\right],$$

$$q_{51}=2b_{24}(5-\coth H\coth 4H)+\frac{1}{2}a_{24}-$$

$$-a_1^2\left(\frac{3}{8}\coth H-\frac{5}{2}\coth 2H+\frac{15}{2}\frac{\alpha_1 k^2}{\tau^2}\right),$$

$$q_{52}=2a_1\left[a_{23}+\frac{3}{4}b_{23}(5-2\coth 3H\coth 2H)\right],$$

$$q_{53}=2b_{24}+2a_{24}+3a_1(b_{23}+a_{23})+$$

$$+a_1^2\left(\coth 2H-\frac{1}{2}\coth H\right),$$

$$\gamma_3=-a_2\left(\frac{3}{2}\coth H+3\coth 2H\right)-$$

$$-\frac{3}{2}(b_{21}a_1+a_{24})\coth H-\frac{51}{8}a_1^2-\frac{1}{8}-$$

$$-3a_0\coth 2H-6b_{24}\coth 4H+3a_{23}\frac{\sigma_1}{\tau},$$

$$\gamma_4=-2a_{23}\coth H-4a_1(2a_2+a_0)\coth H-$$

$$-6b_{23}\coth 3H+4a_{24}\frac{\sigma_1}{\tau}-\frac{3}{2}a_1,$$

$$\gamma_5=-\frac{5}{4}a_{24}\coth H-5a_{23}a_1\coth 2H-$$

$$-\frac{15}{2}a_1b_{23}\coth 3H-10b_{24}\coth 4H-\frac{21}{8}a_1^2,$$

$$\gamma_6=-6a_{24}a_1\coth 2H-12a_1b_{24}\coth 4H-a_1^3,$$

а величина a_3 может быть определена из уравнений для четвертого приближения.

Таким образом, возмущение поверхности бассейна конечной глубины при нелинейном взаимодействии периодических прогрессивных волн первой и второй гармоник до величин третьего порядка определяются выражением

$$\zeta=\varepsilon\cos\theta+\sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n a_n\cos 2\theta+$$

$$+\sum_{n=2}^{3}\varepsilon^n\sum_{j=3}^{4}a_{nj}\cos j\theta+\varepsilon^3\sum_{n=5}^{6}a_{3n}\cos n\theta \quad (22)$$

$$\theta=x+\sigma t,\ \sigma=\tau+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2.$$

Соответствующее выражение можно записать и для потенциала скорости

$$\varphi=\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\varepsilon^3\varphi_3, \quad (23)$$

где φ_1, φ_2, φ_3 определяются формулами (15), (17), (21).

Фазовую скорость волновых возмущений определим по формуле

$$\nu=\sigma k^{-1}.$$

В размерных переменных ($x=x/k$, $t=t/\sqrt{kg}$, $\zeta=\zeta/k$, $a=\varepsilon/k$, где a и k амплитуда и волновое число основной линейной гармоники) выражения для возвышения поверхности бассейна и потенциала скорости примут вид

$$\zeta=a\zeta_1+a^2k\,\zeta_2+a^3k^2\zeta_3 \quad (24)$$