

ВАРИАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ФИЛЬТРАЦИИ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

С.В. Кочергин, В.С. Кочергин,
С.В. Станичный

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ko4ep@mail.ru

Рассматривается вариационный алгоритм фильтрации данных измерений. В его основе лежат вариационные принципы, поиск экстремума некоторого квадратичного функционала, за счет плоского вращения исходной переопределенной системы, разложения ряда измерений по ортогональным функциям. Осуществлена апробация алгоритма на реальных данных. Показана эффективность данной процедуры для восстановления данных в случае их пропуска.

В связи со спецификой спутниковой информации, в их пространственно временной структуре, чаще всего имеются пропуски в данных измерений. Поэтому, важной является задача восстановления данных тем или иным способом. В данной работе предлагается решать эту задачу на основе вариационного алгоритма фильтрации данных [1]. Подобный алгоритм применяется для восстановления амплитуд мод береговых захваченных волн [2].

Пусть в некоторые моменты времени t_i в течении интервала времени T мы имеем данные измерений температуры θ , в одной и той же точке. Разложив θ в ряд по ортогональным функциям синус и косинус, в итоге имеем переопределенную систему алгебраических уравнений:

$$Az = \theta, \quad (1)$$

где z -неизвестный вектор коэффициентов разложения. Его поиск осуществляется за счет плоского вращения системы (1). Коэффициенты такого преобразования ищутся исходя из максимума квадратичного функционала специального вида. В итоге получается другая система алгебраических уравнений эквивалентная (1):

$$\hat{A}z = \eta, \quad (2)$$

где $\hat{A} = V^T A$, $\eta = V^T \theta$, V^T - ортонормальная матрица, конструируемая как пре-

дел произведения элементарных матриц плоского вращения:

$$V^T = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^T$$

$$V_n^T = \prod_{k=1}^n T_{i(k),j(k)}(\varphi_k) \quad (3)$$

Очевидно, главное состоит в определении углов φ_k . Положим:

$$V_n^T A = A_n; \quad (4)$$

тогда:

$$V_{n+1}^T A = A_{n+1}$$

$$A_{n+1} = T_{i(n+1),j(n+1)}^T(\varphi_{n+1}) A_n \quad (5)$$

Здесь $i = i(n+1)$, $j = j(n+1)$, $i < j$ - номера строк в матрицах A_{n+1} и A_n , которые преобразуются с помощью матрицы вращения $T_{ij}^T(\varphi)$.

Обозначим $a_{ik}^{(n+1)}$, $a_{jk}^{(n+1)}$ и $a_{ik}^{(n)}$, $a_{jk}^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots, M$, элементы указанных строк матриц A_{n+1} и A_n . Имеем:

$$a_{ik}^{(n+1)} = ca_{ik}^{(n)} + sa_{jk}^{(n)}$$

$$a_{jk}^{(n+1)} = -sa_{ik}^{(n)} + ca_{jk}^{(n)}, \quad (6)$$

$$c = \cos \varphi$$

$$\text{где } s = \sin \varphi$$

$$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \quad (7)$$

Если положить $V_n^T u_\delta = w_\delta^{(n)}$

$$V_{n+1}^T u_\delta = w_\delta^{(n+1)}$$

$$w_\delta^{(n+1)} = T_{i(n+1),j(n+1)}^T(\varphi_{n+1}) w_\delta^{(n)}, \quad (8)$$

то для компонент с индексами $i = i(n+1)$ и $j = j(n+1)$ будем иметь:

$$w_{i,\delta}^{(n+1)} = cw_{i,\delta}^{(n)} + sw_{j,\delta}^{(n)}$$

$$w_{j,\delta}^{(n+1)} = -sw_{i,\delta}^{(n)} + cw_{j,\delta}^{(n)} \quad (9)$$

Для определения угла φ используем условие: $\Phi_i(\varphi) = \max_\varphi$

$$\Phi_i(\varphi) = \left(\sum_{k=1}^M |a_{ik}^{(n+1)}|^2 \right) - \frac{|w_{i,\delta}^{(n+1)}|^2}{M^2} \quad (10)$$

Подставляя в выражение для $\Phi_i(\varphi)$ выражения для $a_{ik}^{(n+1)}$ и $w_{i,\delta}^{(n+1)}$ по (6) и (9), получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_i(\varphi) &= c^2 \left(\sum_{k=1}^M (a_{ik}^{(n)})^2 - \frac{|w_{i,\delta}^{(n)}|^2}{M^2} \right) \\ &+ s^2 \left(\sum_{k=1}^M (a_{jk}^{(n)})^2 - \frac{|w_{j,\delta}^{(n)}|^2}{M^2} \right) + \\ &+ 2cs \left(\sum_{k=1}^M a_{ik}^{(n)} a_{jk}^{(n)} - \frac{w_{i,\delta}^{(n)} w_{j,\delta}^{(n)}}{M^2} \right), \\ \frac{d\Phi_i(\varphi)}{d\varphi} &= -Q_{ij}^{(n)} \sin 2\varphi + 2P_{ij}^{(n)} \cos 2\varphi, \\ \frac{d^2\Phi_i(\varphi)}{d\varphi^2} &= -2(Q_{ij}^{(n)} \cos 2\varphi) + 2P_{ij}^{(n)} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^M (a_{ik}^{(n)})^2 - \\ &- \sum_{k=1}^M (a_{jk}^{(n)})^2 + \frac{(w_{j,\delta}^{(n)})^2 - (w_{i,\delta}^{(n)})^2}{M^2}, \\ P_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^M a_{ik}^{(n)} a_{jk}^{(n)} - \frac{w_{i,\delta}^{(n)} w_{j,\delta}^{(n)}}{M^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, необходимое условие экстремума (равенство нулю первой производной) дает для угла φ уравнение

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2P_{ij}^{(n)} / Q_{ij}^{(n)} \quad (11)$$

С учетом условия максимума $\left(\frac{d^2\Phi_i(\varphi)}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi^*} < 0$, где φ^* - корень

уравнения (11) получаем:

а) если $Q_{ij}^{(n)} > 0$, то

$$c = \cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + Q_{ij}^{(n)} / D_{ij}^{(n)})},$$

$$s = \sin \varphi = P_{ij}^{(n)} / c D_{ij}^{(n)};$$

б) если $Q_{ij}^{(n)} < 0$, то

$$s = \operatorname{sign} P_{ij}^{(n)} \sqrt{\frac{1}{2} (1 + Q_{ij}^{(n)} / D_{ij}^{(n)})},$$

$$c = \cos \varphi = P_{ij}^{(n)} / s D_{ij}^{(n)}.$$

В этих соотношениях принято:

$$D_{ij}^{(n)} = \sqrt{(Q_{ij}^{(n)})^2 + 4(P_{ij}^{(n)})^2}$$

Уравнения новой системы (2) сортируются по рангу и неинформативные уравнения удаляются из нее. Таким образом, алгоритм фильтрации основан на плоском вращении исходной системы при помощи максимизации квадратичного функционала, характеризующего соотношения коэффициентов системы и правых частей. При этом используется априорная информация о возможных максимальных значениях решения. В результате работы алгоритма получаем эквивалентную систему, в которой уравнения выстроены по рангу информативности. Решая эту систему, находим z и восстанавливаем θ на всем интервале времени T .

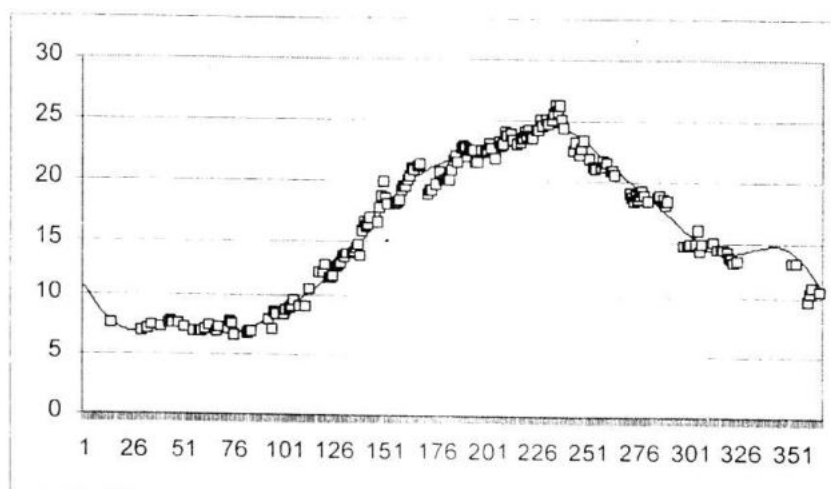


Рисунок 1 - Данные измерений и восстановленная функция (2000 г.)

В качестве данных изменений θ , были взяты три временных ряда поверхностной температуры для одной и той же точки Черного моря. Эти ряды соответствуют 2000, 2001 и 2002 годам. Восстановление

данных измерений происходило на выменном интервале один год. Было взято по семь амплитуд мод для синуса и косинуса в ортогональном разложении.

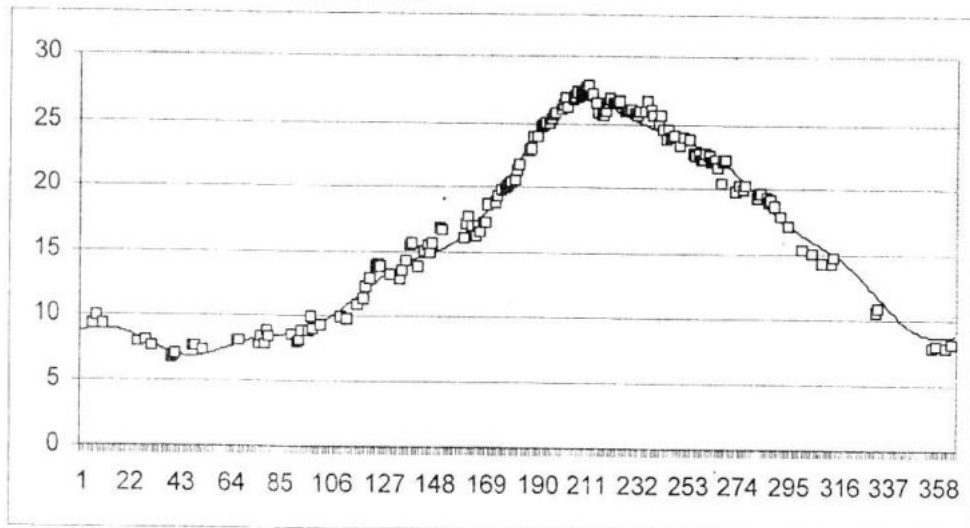


Рисунок 2 – Данные измерений и восстановленная функция (2001 г.)

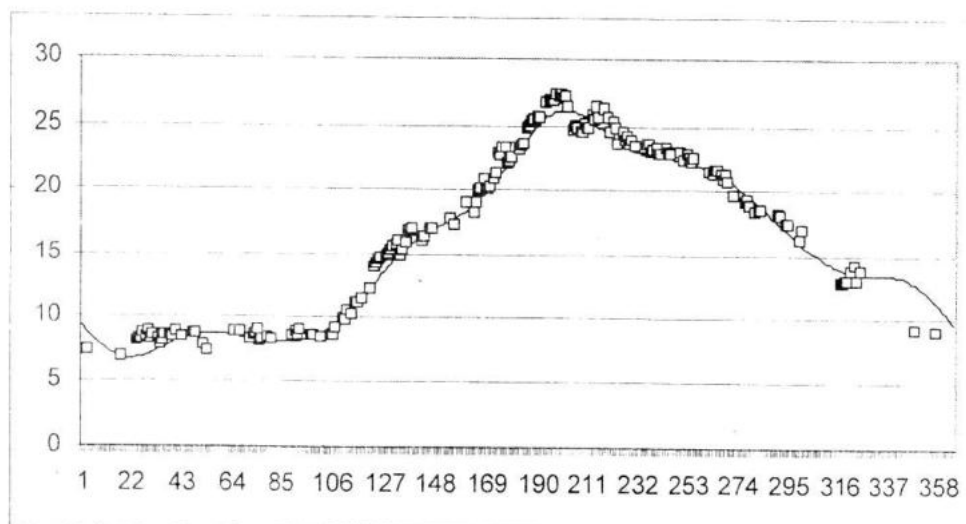


Рисунок 3 – Данные измерений и восстановленная функция (2002 г.)

Рисунки 1-3 характеризуют поведение восстановленной поверхностной температуры в данной точке. На рисунке квадратиками обозначены точки, в которых имелись данные измерений. Кроме этого производилось сравнение среднемесячных значений температуры с имеющейся информацией о данной характеристике. Рисунок 4 изображает поведение среднемесячных значений в течении исследуемых временных периодов.

Для увеличения точности восстановления функции разложения существует два подхода:

- ✓ увеличение количества мод разложения
- ✓ уменьшение интервала времени, на котором осуществляется разложение.

Например, на рисунке 3 показана восстановленная функция на интервале времени 2 месяца (январь-февраль 2001 года). В этом расчете использовано 3 моды в ортогональном разложении в силу малого количества данных измерений. Среднемесячные значения показали хорошее соответствие с существующей информацией в этой характеристике.

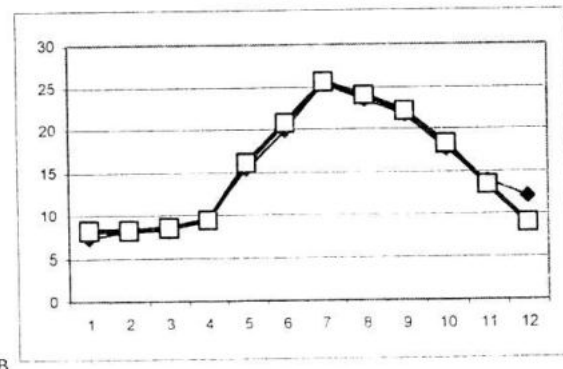
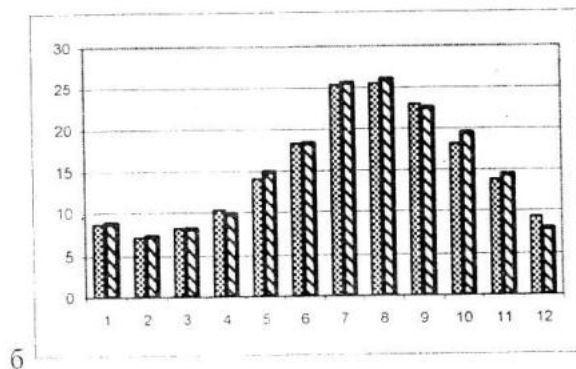
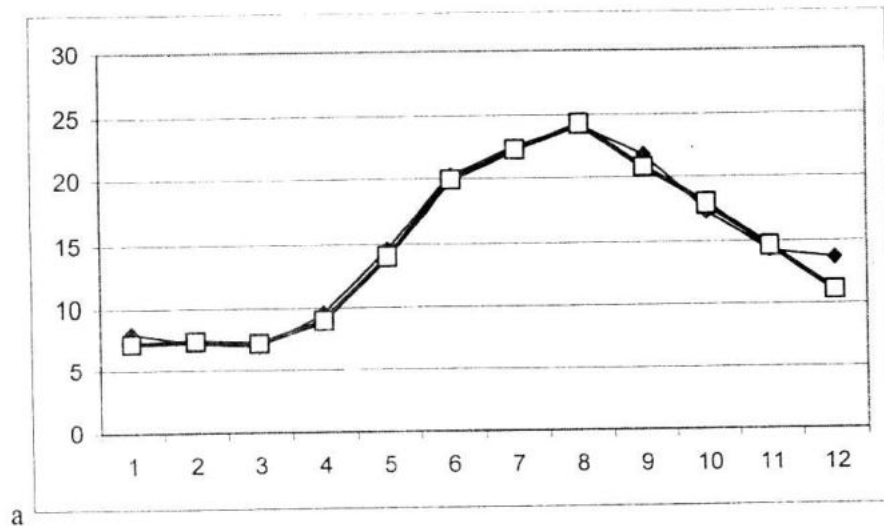


Рисунок 4 – Среднемесячные температуры (а – 2000 г., б – 2001 г., в – 2002 г.)

В целом многочисленные эксперименты показали надежную работу вариационного алгоритма фильтрации данных измерений, что позволило восстановить пропущенные данные в поверхностной температуре в данной точке. Полученные результаты дают хорошее соответствие среднемесячным значениям температуры. Выбор интервала времени, на котором решается задача восстановления, зависит от количества имеющейся информации, количества мод разложения и требуемой точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н. Страхов // Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений – основа для решения линейных задач гравиметрии и магнитометрии – Докл. АН СССР., 1991, No.3. – С. 595–599.
2. В.Н. Еремеев, В.П. Кочергин, С.В. Кочергин, С.Н. Склад // Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика. 2002. – 238 с.