ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ДВУМЕРНОМ БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Н.А. Евстигнеева

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Исследуются вынужденные колебания жидкости в бассейнах с параболическим профилем дна и переменной глубины с боковыми стенками. Получены выражения для профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости, проведен анализ их амплитудных функций, построены графики. Установлены зависимости характеристик волновых движений от формы бассейнов и параметров вынуждающих сил.

Введение. Математические модели волновых движений жидкости в ограниченных бассейнах представляют собой системы уравнений в частных производных с граничными условиями. При решении этих задач используем аналитические и численные методы.

В работах [1,2] анализируются свободные и вынужденные колебания жидкости без учета диссипативных сил в бассейнах с параболическим профилем дна и переменной глубины с боковыми стенками.

В данной работе с учетом диссипативных сил решаются следующие задачи: задача о вынужденных колебаниях жидкости, возникающих под действием периодических по времени поверхностных давлений в бассейне с параболическим профилем дна и задача о вынужденных колебаниях жидкости в бассейне переменной глубины с боковыми стенками.

Задача о вынужденных колебаниях жидкости в бассейне с параболическим профилем дна, рассматриваемая в первой разделе статьи, решается аналитически.

Задача о вынужденных колебаниях жидкости в бассейне переменной глубины с боковыми стенками, рассматриваемая во втором разделе статьи, решается численно (методом Рунге-Кутта четвертого порядка).

1. Вынужденные колебания жидкости в бассейне с параболическим профилем дна. Рассмотрим вынужденные волны, возникающие в бассейне переменной глубины под действием периодических по времени поверхностных давлений, представленных в комплексной форме

$$p_0(x,t) = p_1\psi(x)e^{i\sigma t}. \qquad (1.1)$$

Здесь σ – частота колебаний жидкости, $\psi(x)$ – известная функция, для которой выполняется условие

$$max|\psi(x)| = 1.$$

Предполагая волны длинными и учитывая диссипативные силы, имеем в линейном приближении для нахождения $u(x,t)$ и $\zeta(x,t)$ систему двух уравнений

$$u_t = -g\zeta_x - \mu u - \rho^{-1}p_{0x}, \qquad (1.2)$$

$$\zeta_t = -(uh)_x, \qquad (1.3)$$

где u – горизонтальная составляющая скорости; ζ – профиль свободной поверхности; h – глубина бассейна; μ – коэффициент диссипации.

Решение системы (1.2)–(1.3) ищем в комплексном виде

$$u(x,t) = \tilde{u}(x)e^{i\sigma t}, \qquad (1.4)$$

$$\zeta(x,t) = \tilde{\zeta}(x)e^{i\sigma t}. \qquad (1.5)$$

Задача о вынужденных колебаниях жидкости в бассейне произвольной глубины $h(x)$ без вертикальных стенок сведена к решению уравнения

$$ghf_{xx} + (\sigma^2 - i\sigma\mu)f = i\sigma dgh\psi_x, \qquad (1.6)$$

где

$$d = p_1/\rho g, \quad f(x) = h(x)\tilde{u}(x). \qquad (1.7)$$

Зная функцию $f(x)$, находим выражения для профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости

$$\tilde{\zeta}(x) = (i/\sigma)f_x, \qquad (1.8)$$

$$\tilde{u}(x) = f(x)/h(x). \qquad (1.9)$$

Исследуем волны в бассейне, глубина которого меняется по параболическому закону

$$h(x) = h_0(1 - x^2/a^2) \quad -a \le x \le a. \qquad (1.10)$$

Требуя ограниченности горизонтальной составляющей скорости на границах бассейна $(x = \pm a)$, имеем из (1.7) и (1.10)

$$f(\pm a) = 0. \qquad (1.11)$$

Уравнение (1.6) допускает решение в виде многочлена n-ой степени. Рассмотрим случай $n = 2$. Многочлен второй степени, удовлетворяющий граничным условиям (1.11), имеет вид

$$f(x) = B_1\left(x^2 - a^2\right), \qquad (1.12)$$

где B_1 – постоянный множитель.

Пусть функция $\psi_1(x)$ имеет вид

$$\psi_1(x) = \frac{x+a}{2a}. \qquad (1.13)$$

Подставляя (1.10), (1.12), (1.13) в (1.6) находим выражение для B_1

$$B_1 = \frac{dc_0^2\sigma\left(\sigma\mu - i\left(\sigma^2 - b_1^2\right)\right)}{2a^3\Delta_1}, \qquad (1.14)$$

где

$$c_0^2 = gh_0, \; b_1^2 = 2c_0^2/a^2, \qquad (1.15)$$

$$\Delta_1 = \left(\sigma^2 - b_1^2\right)^2 + \sigma^2\mu^2. \qquad (1.16)$$

Для поверхностных давлений, профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости получены следующие выражения

$$p_0(x,t) = p_1\frac{x+a}{2a}cos\,\sigma t, \qquad (1.17)$$

$$\zeta_1(x,t) = \frac{dc_0^2\alpha_1}{a^3\Delta_1}x\,cos\left(\sigma t + \gamma_1\right), \qquad (1.18)$$

$$u_1(x,t) = -\frac{\sigma dc_0^2\alpha_1}{2ah_0\Delta_1}sin\left(\sigma t + \gamma_1\right), \qquad (1.19)$$

где

$$\alpha_1^2 = \left(\sigma^2 - b_1^2\right)^2 + \left(\mu\sigma\right)^2, \quad \gamma_1 = arctg\frac{\sigma^2 - b_1^2}{\sigma\mu}.$$

Пусть

$$p_1 = 10 \text{ гПа}, \; d = 10 \text{ см}, \; 2a = 300 \text{ км},$$

$$h_0 = 2 \text{ км}, \; \mu = \mu_1 = 10^{-1}\sigma_{11}, \qquad (1.20)$$

где σ_{11} – частота, соответствующая первой моде свободных волн.

Для амплитудной функции профиля свободной поверхности из (1.5), (1.18) находим

$$\tilde{\zeta}_1(x) = D_1 x_1, \qquad (1.21)$$

здесь

$$D_1 = \frac{dc_0^2\alpha_1}{\Delta_1 a^2}, \quad x_1 = x/a. \qquad (1.22)$$

Используя (1.15), (1.16), (1.20)–(1.22) и $\sigma = \sigma_{11}$, имеем

$$\tilde{\zeta}_1(x) = 0{,}49x_1 \text{ м}. \qquad (1.23)$$

Для амплитудной функции горизонтальной составляющей скорости из (1.4), (1.19) находим

$$\tilde{u}_1(x) = -\sigma dc_0^2\alpha_1/\left(2a\Delta_1 h_0\right). \qquad (1.24)$$

Используя (1.15), (1.16), (1.20), (1.22) и $\sigma = \sigma_{11}$, получаем выражение для $\tilde{u}_1(x)$

$$\tilde{u}_1(x) = -0{,}024 \text{ м/с} \text{ (не зависит от } x\text{)}.$$

Аналогично рассмотрены случаи $n = 3, 4$.

2. Вынужденные волны в бассейне переменной глубины с боковыми стенками.

Рассмотрим вынужденные волны, возникающие в ограниченном бассейне переменной глубины с боковыми стенками под действием периодических по времени поверхностных давлений (1.1).

Для нахождения $u(x,t)$ и $\zeta(x,t)$ используем (1.2)–(1.3).

Решение системы уравнений (1.2), (1.3) ищем в комплексном виде (1.4) и (1.5).

Задача для бассейна произвольной глубины $h(x)$ сведена к решению уравнения

$$g\left(h\tilde{u}\right)_{xx} + \left(\sigma^2 - i\sigma\mu\right)\tilde{u} = i\sigma dg\psi_x. \qquad (2.1)$$

Глубина бассейна (рис. 2.1) меняется по параболическому закону

$$h(x) = h_1 + h_2\frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad -a \le x \le a, \qquad (2.2)$$

где h_1 – глубина боковой стенки.

На стенках бассейна выполняется условие

$$\tilde{u}(\pm a) = 0. \qquad (2.3)$$

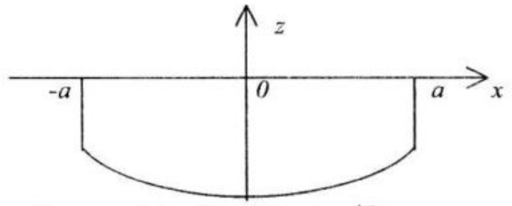

Рисунок 2.1 – Бассейн с параболическим профилем дна с боковыми стенками

Функция $\psi(x)$ имеет вид (1.13).

Используем числовые данные (1.20) и

$$\tau = 0{,}98 \cdot \tau_{11}, \; h_0 = h_1 + h_2 = 2 \text{ км}. \qquad (2.4)$$

Здесь

$$\tau_{11} = 2\pi\left(\sqrt{\frac{2gh_0}{a^2}}\left(1 - \frac{a^2\mu^2}{8gh_0}\right)\right)^{-1}$$

τ_{11} соответствует первой моде свободных волн в бассейне с параболическим профилем дна без стенок.

Решение уравнения (2.1) с граничными условиями (2.3) имеет вид

$$\tilde{u}(x) = A_1\tilde{u}_1(x) + A_2\tilde{u}_2(x) + \tilde{u}_3(x), \qquad (2.5)$$

где $\tilde{u}_1(x)$ – решение однородного уравнения (2.1) с начальными условиями

$$\tilde{u}_1(-a)=1,\ \tilde{u}_{1x}(-a)=0,$$

$\tilde{u}_2(x)$ – решение однородного уравнения (2.1) (при $d=0$) с начальными условиями

$$\tilde{u}_2(-a)=0,\ \tilde{u}_{2x}(-a)=1,$$

$\tilde{u}_3(x)$ – решение неоднородного уравнения (2.1) с начальными условиями

$$\tilde{u}_3(-a)=1,\ \tilde{u}_{3x}(-a)=0.$$

Численные значения $\tilde{u}_1(x), \tilde{u}_2(x), \tilde{u}_3(x)$ получены с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом $\Delta x = 100\,м$.

При $h_1 = 5\,м$, используя (2.1)–(2.5) и (1.20), получаем численные значения для амплитудных функций (таблица 2.1), при помощи вычислительного пакета *Maple9.5*.

Таблица 2.1 – Значения амплитудных функций $\tilde{u}(x)$ и $\tilde{\zeta}(x)$ при $h_1 = 5\,м$

$x(м)$	$\tilde{u}(x)$ $(см/с)$	$\tilde{\zeta}(x)$ $(см)$
-150000	0	45,53
-149950	0,48	35,96
-149900	0,80	29,72
-149000	1,94	7,23
-100000	2,30	0,18
-1500	2,31	$1,49\cdot10^{-3}$
0	2,31	$2,1\cdot10^{-3}$
1500	2,31	$3,3\cdot10^{-3}$
100000	2,30	0,18
149000	1,94	7,19
149900	0,76	28,50
149950	0,51	37,18
150000	0	43,56

Максимальное значение функции $\tilde{u}(x)$ достигается при $x=0$ $(\tilde{u}(0)=2,31\ см/с)$. При $-150000 \le x \le 0$ $\tilde{u}(x)$ возрастает (меняется от 0 до 2,31 *см/с*). При $0 \le x \le 150000$ $\tilde{u}(x)$ убывает (меняется от 2,31 до 0 *см/с*). Максимальные значения $\tilde{\zeta}(x)$ достигаются при $x=\pm a$ $(43,56\ см)$, минимальное при $x=-1500$ $(1,49\cdot10^{-3} см)$. При $-150000 \le x \le -1500$ $\tilde{\zeta}(x)$ убывает (меняется от 43,53 до $1,49\cdot10^{-3}$ *см*). При $-1500 \le x \le 150000$ функция возрастает (меняется от $1,49\cdot10^{-3}$ до 43,56 *см*).

Аналогично при $h_1 = 10\,м$ и $15\,м$, получены численные значения для $\tilde{u}(x)$ и $\tilde{\zeta}(x)$. Максимальное значение $\tilde{u}(x)$ при $h_1 = 15\,м$ больше максимального значения $\tilde{u}(x)$ при $h_1 = 10\,м$ и $5\,м$ (2,33; 2,32; 2,31 *м*).

Чем больше h_1, тем больше значение амплитудной функции профиля свободной поверхности. Максимальное по модулю значение $\tilde{\zeta}(x)$ достигается при $h_1 = 15\,м$.

Из (1.1), выделяя мнимую часть, получаем выражение для поверхностных давлений

$$p_0(x,t) = p_1 \frac{x+a}{2a} \sin\sigma t, \qquad (2.6)$$

где p_1, a, σ определяются из (1.20) и (2.4).

Из (1.5), (1.20), (2.1)–(2.4) находим выражение для профиля свободной поверхности

$$\zeta_1(x,t) = (\zeta_{11} + i\zeta_{12})e^{i\sigma t}. \qquad (2.7)$$

Из (2.7), выделяя мнимую часть $\zeta_1(x,t)$, имеем

$$\zeta(x,t) = \tilde{\zeta}(x)\sin(\sigma t + \gamma_1), \qquad (2.8)$$

где

$$\tilde{\zeta}(x) = \sqrt{\zeta_{11}^{\ 2} + \zeta_{12}^{\ 2}},\ \gamma_1 = arctg(\zeta_{12}/\zeta_{11}).$$

Аналогично для горизонтальной составляющей скорости из (1.4), (1.20), (2.1)–(2.4) получаем

$$u(x,t) = \tilde{u}(x)\sin(\sigma t + \gamma_2), \qquad (2.9)$$

где

$$\tilde{u}(x) = \sqrt{u_{11}^{\ 2} + u_{12}^{\ 2}},\quad \gamma_2 = arctg(u_{12}/u_{11}).$$

Заключение. В рамках работы найдено решение задачи для бассейна с параболическим профилем дна для линейной амплитуды давлений, для амплитуд давлений, представленных многочленами второй и третьей степеней.

В задаче о вынужденных колебаниях жидкости в бассейне с боковыми стенками показано, что с увеличением глубины боковой стенки возрастает амплитуда волны на свободной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе Теоретическая гидромеханика. – М.: Гостехиздат, 1955. – 560 с.

2. Л.В.Черкесов, В.А.Иванов, С.М. Хартиев. Введение в гидродинамику и теорию волн. – С.-Пб. : Гидрометеоиздат, 1992. – 264 с.