

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ЖИДКОСТИ В БАССЕЙНЕ
С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ
ПРОФИЛЕМ ДНА**

Н.А. Евстигнеева

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: oaoi@alpha.mhi.iuf.net

Исследуются свободные колебания жидкости в ограниченном бассейне с параболическим профилем дна. Получены выражения для профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости, проведен анализ их амплитудных функций, построены графики. Изучено влияние диссипативных сил на затухание со временем свободных колебаний.

Введение. Модели волновых движений жидкости в ограниченных бассейнах представляют собой краевые задачи математической физики – системы уравнений в частных производных с граничными условиями.

В работе [1] получено аналитическое решение задачи о свободных волнах в бассейне с параболическим профилем дна без учета диссипации.

В данной работе с учетом диссипативных сил аналитическими методами решается задача о свободных колебаниях жидкости в бассейне с параболическим профилем дна. Находятся решения системы уравнений для определения профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости для первой, второй и третьей мод свободных длинных волн. Выбираются числовые значения для длины, глубины бассейна, коэффициента диссипации, выполняется сравнение периода колебаний с учетом диссипативных сил с периодом без учета диссипативных сил, находятся частоты, соответствующие первой, второй и третьей модам свободных длинных волн, анализируются амплитудные функции профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости, строятся их графики.

Задача о свободных колебаниях жидкости. Предполагая волны длинными и учитывая диссипативные силы, имеем в линейном приближении для нахождения горизонтальной составляющей скорости и профиля свободной поверхности систему

двух дифференциальных уравнений в частных производных

$$u_t = -g\zeta_x - \mu u, \quad (1)$$

$$\zeta_t = -(uh)_x, \quad (2)$$

где u – горизонтальная составляющая скорости; ζ – профиль свободной поверхности; h – глубина бассейна; μ – коэффициент диссипации.

Решение системы (1)–(2) ищем в комплексном виде

$$u(x,t) = \tilde{u}(x)e^{i\sigma t}, \quad (3)$$

$$\zeta(x,t) = \tilde{\zeta}(x)e^{i\sigma t}, \quad (4)$$

где σ – частота колебаний жидкости.

Задача о свободных волнах в бассейне произвольной глубины $h(x)$ сведена к решению уравнения

$$hf_{xx} + \frac{\sigma^2 - i\sigma\mu}{g}f = 0, \quad (5)$$

где

$$f(x) = h(x)\tilde{u}(x). \quad (6)$$

Зная функцию $f(x)$, находим выражения для амплитудных функций профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости

$$\tilde{\zeta}(x) = \frac{i}{\sigma}f_x, \quad (7)$$

$$\tilde{u}(x) = \frac{f(x)}{h(x)}. \quad (8)$$

Исследуем волны в бассейне, глубина которого меняется по параболическому закону

$$h(x) = h_0(1 - x^2/a^2) \quad -a \leq x \leq a. \quad (9)$$

Для определения $f(x)$ из (5) и (9) получаем

$$(a^2 - x^2)f_{xx} + bf = 0, \quad (10)$$

где

$$b = \frac{(\sigma^2 - i\sigma\mu)a^2}{gh_0}. \quad (11)$$

Требую ограниченности горизонтальной составляющей скорости на границах бассейна ($x = \pm a$), имеем из (6) и (9)

$$f(\pm a) = 0. \quad (12)$$

Уравнение (10) допускает решение в виде многочлена n -ой степени ($n \geq 2$).

Рассмотрим случай $n = 2$. Многочлен второй степени, удовлетворяющий гранич-

ным условиям (12), имеет вид

$$f(x) = A_1(x^2 - a^2), \quad (13)$$

где A_1 – постоянный множитель.

Подставляя (13) в (10), находим

$$A_1(a^2 - x^2)(2 - b) = 0.$$

Решение в форме многочлена второй степени возможно лишь при

$$b = 2. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (11), получаем

$$\sigma^2 - i\sigma\mu - 2gh_0/a^2 = 0. \quad (15)$$

При $\mu = 0$

$$\sigma = \frac{\sqrt{2gh_0}}{a}. \quad (16)$$

Решая квадратное уравнение (15) при $\mu > 0$, имеем

$$\sigma_{1,2} = i\mu_0 \pm \sigma_{11}, \quad (17)$$

где

$$\mu_0 = \mu/2, \quad (18)$$

$$\sigma_{11} = \sqrt{\frac{2gh_0}{a^2} \sqrt{1 - \frac{a^2\mu^2}{4gh_0}}}. \quad (19)$$

Предполагая $a^2\mu^2/(4gh_0) \ll 1$, перепишем (19) в виде

$$\sigma_{11} = \sqrt{\frac{2gh_0}{a^2} \left(1 - \frac{a^2\mu^2}{8gh_0}\right)}. \quad (20)$$

Частота σ_{11} соответствует первой моде свободных длинных волн с учетом диссипативных сил в бассейне, глубина которого меняется по закону (9).

Пусть

$$2a = 300 \text{ км}, \quad h_0 = 2 \text{ км}, \quad \mu = \mu_1 = 10^{-1} \sigma_{11}. \quad (21)$$

Из (20), (21) находим

$$\tau_{11} = 1 \text{ ч } 21 \text{ мин } 25 \text{ с}, \quad \sigma_{11} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

При $\mu = 0$

$$\tau_{10} = 1 \text{ ч } 19 \text{ мин } 17 \text{ с}, \quad \sigma_{10} = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, период колебаний с учетом диссипативных сил больше периода колебаний без учета диссипативных сил.

Для профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости получены следующие выражения

$$\zeta_1(x, t) = (2A_1/d_1) x e^{-\mu_0 t} \cos(\sigma_{11} t + \gamma_1), \quad (22)$$

$$u_1(x, t) = -A_1 a^2 h_0^{-1} e^{-\mu_0 t} \cos(\sigma_{11} t), \quad (23)$$

где

$$d_1^2 = \sigma_{11}^2 + \mu_0^2, \quad \gamma_1 = \arctg(\sigma_{11}/\mu_0).$$

Из (22) и (23) видно, что $\zeta_1(x, t)$ и $u_1(x, t)$

со временем затухают.

Найдем время, через которое свободная поверхность уменьшится в два раза. Анализируя (22), получим выражение следующего вида

$$e^{-\mu_0 T} = \frac{1}{2}, \quad (24)$$

где T – искомое время.

Используя (18), (21) и (24), найдем T

$$T = 2 \text{ ч } 57 \text{ мин } 44 \text{ с}.$$

Для амплитудной функции профиля свободной поверхности из (4), (22) имеем

$$\tilde{\zeta}_1(x) = D_1 x_1.$$

Здесь

$$D_1 = 2A_1 a/d_1, \quad x_1 = x/a. \quad (25)$$

Пусть амплитуда волны

$$D_1 = 0,5 \text{ м}. \quad (26)$$

Профиль волны принимает вид

$$\tilde{\zeta}_1(x) = 0,5 x_1 \text{ м} \quad (27)$$

– это прямая, проходящая через начало координат (рис. 1), $\text{tg} \alpha = D_1/a$.

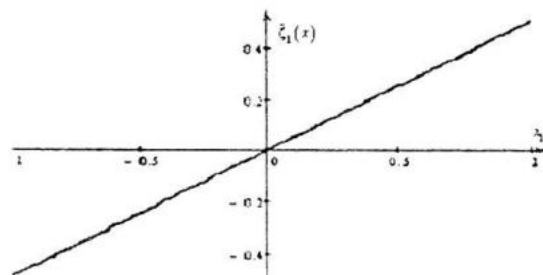


Рисунок 1 – График амплитудной функции профиля свободной поверхности для $n = 2$

Точка $x = 0$ – узловая точка. Максимальное отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня происходит на границах бассейна. Из (27) получаем

$$\tilde{\zeta}_1(a) = 0,5 \text{ м}, \quad \tilde{\zeta}_1(-a) = -0,5 \text{ м}$$

– максимальное и минимальное значения амплитудной функции профиля свободной поверхности.

Используя (3), (23) и учитывая (25), находим выражение для $\tilde{u}_1(x)$

$$\tilde{u}_1(x) = -B_1, \quad B_1 = D_1 a d_1 / (2h_0). \quad (28)$$

Используя (21), (25), (26), (28), получаем выражение для $\tilde{u}_1(x)$

$$\tilde{u}_1(x) = -0,024 \text{ м/с (не зависит от } x).$$

Амплитудная функция горизонтальной составляющей скорости – прямая, параллельная оси x (рис. 2).

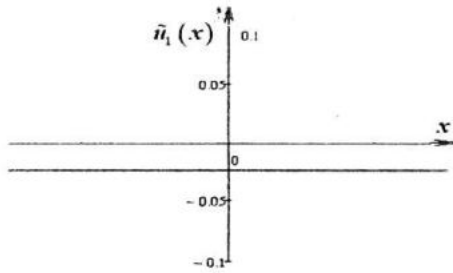


Рисунок 2 – График амплитудной функции горизонтальной составляющей скорости для $n = 2$

Для случая $n = 3$ многочлен третьей степени, удовлетворяющий граничным условиям (12), имеет вид

$$f(x) = A_2(x^2 - a^2)(x + \delta),$$

где A_2 – постоянный множитель.

$$\sigma_{21} = \sqrt{6gh_0/a^2(1 - a^2\mu^2/(8gh_0))}.$$

Частота σ_{21} соответствует второй моде свободных длинных волн с учетом диссипативных сил в бассейне, глубина которого меняется по закону (9).

Пусть

$$2a = 300 \text{ км}, h_0 = 2 \text{ км}, \mu = \mu_2 = 10^{-1}\sigma_{21}.$$

Для профиля свободной поверхности и горизонтальной составляющей скорости получены следующие выражения

$$\zeta_2(x, t) = \frac{2A_2(3x^2 - a^2)}{d_2} e^{-\mu_0 t} \cos(\sigma_{21}t + \gamma_2),$$

$$u_2(x, t) = -A_2 a^2 h_0^{-1} x e^{-\mu_0 t} \cos(\sigma_{21}t),$$

где

$$d_2^2 = \sigma_{21}^2 + \mu_0^2, \quad \gamma_2 = \text{arctg}(\sigma_{21}/\mu_0).$$

Амплитудная функция профиля свободной поверхности имеет вид

$$\tilde{\zeta}_2(x) = D_2(3x_1^2 - 1)/2, \quad D_2 = 2A_2 a^2 / d_2.$$

Профиль волны при $D_2 = 0,5 \text{ м}$

$$\tilde{\zeta}_2(x) = (3x_1^2 - 1)/4 \text{ м}.$$

Т.е. $\tilde{\zeta}_2(x)$ – парабола с двумя узловыми точками $x_{1,2} = \pm a/\sqrt{3}$ (рис. 3).

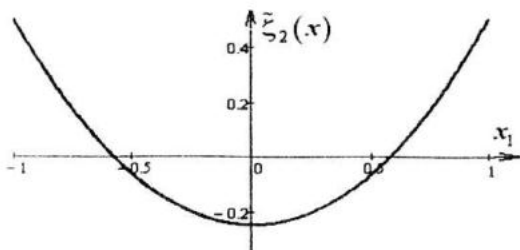


Рисунок 3 – График амплитудной функции профиля свободной поверхности для $n = 3$

Максимальное отклонение свободной поверхности от оси x происходит на границах бассейна. При $x = 0$ ($\tilde{\zeta}_2(x) = -0,25 \text{ м}$) достигается минимальное значение.

Амплитудная функция горизонтальной составляющей скорости имеет вид

$$\tilde{u}_2(x) = -B_2 x_1,$$

где

$$B_2 = D_2 d_2 a / (2h_0).$$

Используя числовые данные, находим

$$\tilde{u}_2(x) = -4 \cdot 10^{-2} x_1 \text{ м/с}.$$

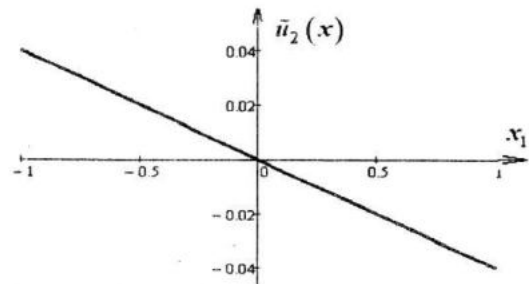


Рисунок 4 – График амплитудной функции горизонтальной составляющей скорости для $n = 3$

Амплитудная функция горизонтальной скорости (рис. 4) является линейной функцией x , и жидкость периодически движется то к центру бассейна, то от него.

Аналогично рассмотрен случай $n = 4$. Амплитудная функция профиля свободной поверхности $\tilde{\zeta}_3(x)$ – кубическая парабола с тремя узловыми точками. Минимальное и максимальное значения достигаются на границах бассейна. Амплитудная функция горизонтальной составляющей скорости $\tilde{u}_3(x)$ – парабола.

Заключение. В рамках работы найдены выражения трех первых мод свободных длинных волн, изучено влияние диссипативных сил на затухание со временем свободных колебаний. Показано, что период этих колебаний с учетом диссипативных сил больше периода без учета диссипативных сил. Проанализированы и построены амплитудные функции профиля свободной поверхности и составляющей скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе Теоретическая гидромеханика. – М.: Гос-техиздат, 1955. – 560 с.