ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПОТОКЕ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПОСТОЯННОЙ ГЛУБИНЫ

Анд.А. Букатов, О.М. Букатова

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ocean@mhi2.sebastopol.ua

Методом многих масштабов получены аналитические выражения для определения характеристик возмущений конечной амплитуды до величин третьего порядка малости, формируемых в однородном потоке периодической бегущей волной.

Введение. В линейной постановке волновое возмущение потока несжимаемой жидкости исследовано в [1]. Изучению периодических бегущих волн конечной амплитуды при отсутствии потока в жидкости постоянной глубины посвящена работа [2]. Исследование нелинейных волн в потоке бесконечной глубины выполнено в [3]. В данной работе рассмотрена задача о возмущениях конечной амплитуды, формируемых периодической бегущей волной в однородном потоке идеальной жидкости постоянной глубины.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении возмущений конечной амплитуды на потоке однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины H. Скорость потока U в невозмущенном состоянии повсюду одинакова и направлена по оси x. Начало координат выберем на свободной поверхности невозмущенного потока, а ось z направим вертикально вверх. Предположим, что движение, возникающее в результате возмущения такого равномерного потока, обладает потенциалом скорости

$$\Phi = Ux + \varphi(x,z,t) - \frac{1}{2}U^2 t, \qquad (1)$$

где $\varphi(x, z, t)$ характеризует потенциал возмущения основного потока.
Обозначим через $\xi(x, t)$ вертикальное перемещение свободной поверхности потока от невозмущенного положения $z = 0$. Тогда задача заключается в нахождении функции $\Phi(x, z, t)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0, \ -\infty < x < \infty, \ -H \le z \le \xi \qquad (2)$$

динамическому

$$g\xi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] = 0\,, \qquad (3)$$

вытекающему из закона Бернулли, и кинематическому

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

условиям на свободной поверхности $z = \xi(x, t)$ потока, а также условию непротекания

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad (5)$$

на дне $z = -H$. В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\xi(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = 0. \qquad (6)$$

так как $\Phi(x, z, t)$ является гармонической функцией от x и z, то $\varphi(x, z, t)$ также будет гармонической и задача (2) – (6) с учетом (1) в безразмерных величинах

$$x_1 = kx, \quad z_1 = kz, \quad \xi_1 = k\xi, \quad t_1 = \sqrt{kg}t,$$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{k^3}{g}}\varphi, \quad U_1 = \sqrt{\frac{k}{g}}U$$

перепишется в виде

$$\Delta\varphi = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad -N \le z \le \xi, \qquad (7)$$

$$\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = 0, \ z = \xi\,, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \left(U + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \ z = \xi \qquad (9)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \ z = -H, \qquad (10)$$

$$\xi(x,t) = f(x), \ \ \frac{\partial\xi}{\partial t} = 0, \ \ t = 0. \qquad (11)$$

Здесь и далее индекс 1 опущен, k – волновое число.

Уравнения для нелинейных приближений. Решение задачи (7)-(11) найдем методом многих масштабов. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, где ε – малое, но конечное, и предположим, что

$$\xi = \varepsilon\xi_0, \ \varphi = \varepsilon\varphi_0, \ f = \varepsilon f_0,$$

$$\xi_0 = \xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \varepsilon^2\xi_3 + O(\varepsilon_3),$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_3 + O(\varphi^3), \qquad (12)$$

$$f_0 = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + O(\varepsilon^3).$$

Здесь f_n – функции от x, а ξ_n, φ_n – от x, T_0, T_1, T_2.

Подставим (12) в (7) – (11). Тогда для определения ξ_n, φ_n порядка ε^n, $n = 1, 2, 3$ получим уравнения

$$\Delta\varphi_n = 0, -\infty < x < \infty, -H \le z \le 0, \qquad (13)$$

$$\xi_n + \frac{\partial\varphi_n}{\partial T_0} + U\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} = F_n^{\bullet}, \ z = 0, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial T_0} + U\frac{\partial\xi_n}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} = L_n^{\bullet}, \ z = 0, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial z} = 0, \ z = -H, \qquad (16)$$

$$\xi_n = f_n(x), \ \frac{\partial\xi_n}{\partial T_0} = G_n, \ t = 0. \qquad (17)$$

Здесь

$$F_n^{\bullet} = F_n + F_n^0, \quad L_n^{\bullet} = L_n + L_n^0,$$

$$F_1 = F_1^0 = L_1 = L_1^0 = L_2^0 = G_1 = 0,$$

$$F_2 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1} - \xi_1\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial T_0} + U\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$L_2 = -\frac{\partial\xi_1}{\partial T_1} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \xi_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}, \ G_2 = -\frac{\partial\xi_1}{\partial T_1},$$

$$F_3 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_1} - \xi_1\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial T_1} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial T_0} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right) - F_{31},$$

$$F_{31} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2} + \xi_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial T_0} + \frac{1}{2}\xi_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial T_0} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - UF_{32}$$

$$F_{32} = \xi_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial x} + \xi_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x} + \frac{1}{2}\xi_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial x},$$

$$L_3 = -\frac{\partial\xi_2}{\partial T_1} - \frac{\partial\xi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \xi_1\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right) + L_{31},$$

$$L_{31} = \xi_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\xi_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^3}, \ G_3 = -\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial\xi_2}{\partial T_1},$$

$$F_2^0 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_0}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial T_0} + U\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right),$$

$$F_3^0 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial T_1} + \frac{\partial\xi_2}{\partial T_0} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial\xi_1}{\partial T_0}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \xi_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right) - UF_{31}^0,$$

$$F_{31}^0 = \frac{\partial\xi_1}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \xi_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\xi_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z},$$

$$L_3^0 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right)^2.$$

Отметим, что слагаемые F_2^0, F_3^0, L_3^0, входящие в правые части уравнений (14), (15), обусловлены учетом зависимости ξ_0 от x и t при подстановке потенциала скорости на свободной поверхности $z = \xi$ потока в динамическое (8) и кинематическое (9) условия.

Выражения для потенциала скорости возмущения потока и возвышения свободной поверхности. Остановимся на рассмотрении бегущих периодических волн. В таком случае выберем первое приближение ($n = 1$) возвышения ξ_1 поверхности потока в форме

$$\xi_1 = \cos\theta, \quad \theta = x - \tau T_0 + \beta(T_1, T_2). \qquad (18)$$

Тогда из условий (15), (16) находим

$$\varphi_1 = b_1\sin\theta, \quad b_1 = \tau_1 sh^{-1}Hch(z + H). \qquad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в динамическое условие (14) при $n = 1$, найдем дисперсионное соотношение

$$\tau_1^2 = thH. \qquad (20)$$

Выражение, определяющее обусловленный нелинейностью фазовый сдвиг $\beta(T_1, T_2)$, получим из последующих приближений.

Подставив ξ_1 и φ_1 из (18) и (19) в правые части условий (14), (15) для второго приближения и решив задачу при $n = 2$, предполагая отсутствие основной гармоники, найдем

$$\xi_2 = a_2\cos 2\theta, \ \varphi_2 = b_2\sin 2\theta, \qquad (21)$$

$$a_2 = \tau_1^2\frac{\eta_2}{\mu_2}, \quad b_2 = \tau_1\frac{\nu_2 ch2(z + H)}{2\mu_2 ch2H},$$

$$\eta_2 = cthH - \frac{1}{4}(5 - cth^2H)th2H,$$

$$\nu_2 = cthH - \frac{1}{2}\tau_1^2(5 - cth^2H),$$

$$\mu_2 = 2\tau_1^2 - th2H.$$

При этом $\beta = \beta(T_2)$.

Полученные решения для первого (18), (19), (20) и второго (21) приближений определяют правые части динамического (14) и кинематического (15) условий задачи для третьего приближения ($n = 3$). Исключив в них слагаемые, порождающие секулярность, для ξ и φ в третьем приближении найдем

$$\xi_3 = a_3 \cos 3\theta,\ \varphi_3 = b_3 \sin 3\theta,$$

$$a_3 = \tau_1^2 \frac{\eta_3}{\mu_3},\ b_3 = \tau_1 \frac{\nu_3 ch3(z+H)}{3\mu_3 ch3H},$$

$$\eta_3 = l_2 - l_4 th3H,\ \nu_3 = l_2 - 3\tau_1^2 l_4,$$

$$\beta = -\frac{1}{2}\tau_1\left(l_1 + \tau_1^2 l_3\right)\varepsilon^2 t,\ \ \mu_3 = 3\tau_1^2 - th3H,$$

$$l_1 = a_2\left(\frac{1}{2}cthH + cth2H\right) - \frac{1}{2}cthHcth2H - \frac{3}{8},$$

$$l_2 = 3a_2\left(\frac{1}{2}cthH + cth2H\right) - \frac{3}{2}cthHcth2H + \frac{5}{8},$$

$$l_3 = a_2\left(\frac{1}{2} + cthHcth2H\right) + \frac{5}{8}cthH - \frac{1}{2}cth^2Hcth2H,$$

$$l_4 = a_2\left(\frac{11}{2} - cthHcth2H\right) - \frac{15}{8}cthH + \frac{1}{2}cth^2Hcth2H.$$

Отметим, что $\mu_{2,3} \neq 0$ при $H \neq 0$.

Таким образом, возвышение поверхности ξ и потенциал скорости φ возмущения основного потока до величин третьего порядка малости определяются выражениями

$$\xi = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n a_n \cos n\theta,\ \ \varphi = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n b_n \sin n\theta, \quad (22)$$

$$\theta = x - \sigma t,\ \ \sigma = U \pm \tau_1\left(1 + \varepsilon^2\sigma_0\right),$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\left(l_1 + \tau_1^2 l_3\right),\ \tau_1 = \sqrt{thH},\ a_1 = 1,$$

где знаки плюс и минус в выражении σ характеризуют возмущения, бегущие вниз и вверх по потоку соответственно.

Фазовую скорость волнового возмущения потока определим по формуле

$$\nu = U \pm \sqrt{\frac{g}{k}}\tau_1\left(1 + \varepsilon^2\sigma_0\right) \quad (23)$$

Если при выводе кинематического и динамического граничных условий для нелинейных приближений пренебречь зависимостью ξ_0 от x и t в выражении потенциала скорости на свободной поверхности потока (полагая F_2^0, F_3^0, L_3^0 равными нулю в (14), (15)), то в формулах (22), (23), определяющих решение задачи, следует учесть, что

$$\eta_2 = \frac{1}{2}\left(3cthH - thH\right)\left(1 + th^2H\right)^{-1},$$

$$\nu_2 = cthH - \frac{1}{2}\tau_1^2\left(3 - cth^2H\right),$$

$$l_1 = a_2\left(\frac{1}{2}cthH + cth2H\right) - \frac{1}{2}cthHcth2H + \frac{3}{8},$$

$$l_2 = 3a_2\left(\frac{1}{2}cthH + cth2H\right) - \frac{3}{2}cthHcth2H + \frac{3}{8},$$

$$l_3 = a_2\left(cthHcth2H - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}cthHcth2H - \frac{9}{8}\right)cthH,$$

$$l_4 = a_2\left(\frac{7}{2} - cthHcth2H\right) + \left(\frac{1}{2}cthHcth2H - \frac{11}{8}\right)cthH.$$

В таком случае a_2, a_3, σ_0 на глубокой воде ($kH >> 1$) при отсутствии потока ($U = 0$) принимают значения 1/2, 3/8, 1/2, совпадающие с приведенными в [4] при обычном разложении по малому параметру.

Заключение. Таким образом, получены асимптотические разложения до величин третьего порядка малости для отклонений свободной поверхности и потенциала скорости возмущений конечной амплитуды, формируемых прогрессивной волной в потоке однородной жидкости постоянной глубины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.В. Черкесов Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. – Киев: Наук. Думка – 1976. – 364 с.
2. A.E. Bukatov, A.A. Bukatov Propagation of Surface Wave of Finite Amplitude in a Basin With floating broken ice // Int. J. Offsh. And Polar Engin. – 1999.–9, №3. –P. 161–166.
3. G. Dagan, T. Milon Free-surface flow past oscillating singularities at resonant frequency // J. Fluid Mech. – 1982. – 120. – P. 139 – 154.
4. G.G. Stokes On the theory of oscillatory waves // Math. Phys. Pap. Cambr. Univ. press. – 1847. – 1. – P. 197–229.