

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН И ТЕЧЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

C.C. Нечаев

Морской гидрофизический институт
НАН Украины

г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: gronder@meta.ua

В статье приводится методика и результаты моделирования генерации волн во вращающемся бассейне переменной глубины. Выполнен анализ влияния изменения высоты боковых стенок бассейна и параметра Кориолиса на характеристики возникающих волн.

Введение. В данной статье приводятся результаты численного моделирования вынужденных колебаний во вращающемся бассейне, генерируемых периодическими по времени поверхностными давлениями, при наличии вертикальных боковых стенок. Волновые процессы описываются следующей линеаризованной системой уравнений 1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{\partial (Hu)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x \in [-a, a], y \in [-\infty, \infty],$$

где u, v — проекции скоростей по осям ox, oy ; f — параметр Кориолиса; H — глубина бассейна. Здесь и далее предполагается, что глубина бассейна является функцией только переменной x .

Редукция к краевой задаче. Будем рассматривать колебания, возникающие под действием поверхностных давлений, представленных в виде

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_0 \Psi(x) \sin(\sigma t), \\ \max_{x \in [-a, a]} \Psi(x) &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и отыскивая решение в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x) \cos(\sigma t), \\ v(x, t) &= v_0(x) \sin(\sigma t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\zeta(x, t) = \zeta_0(x) \sin(\sigma t),$$

получаем

$$\begin{aligned} g \frac{d^2 Hu_0}{dx^2} &= \frac{P_0 \sigma}{\rho} \frac{d \Psi}{dx} + (f^2 - \sigma^2) u_0, \\ v_0 &= -\frac{f}{\sigma} u_0(x), \\ \zeta_0 &= -\frac{1}{\sigma} \frac{d Hu_0}{dx}, \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее предполагается, что глубина бассейна меняется по параболическому закону

$$H(x) = h_0 + (h_{max} - h_0) \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad (5)$$

на боковых границах выполняется условие непротекания

$$u_0(\pm a) = 0. \quad (6)$$

Тем самым решение задачи генерации волн в бассейне с параболическим профилем дна сводится к краевой задаче

$$\begin{aligned} g \frac{d^2 d Hu_0}{dx^2} &= \frac{P_0 \sigma}{\rho} \frac{d \Psi}{dx} + (f^2 - \sigma^2) u_0, \\ u_0(\pm a) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$u(x) = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + u_3(x), \quad (8)$$

где u_1 — решение задачи Коши для однородного уравнения (7) с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_1|_{x=-a} &= 0, \\ \frac{du_1}{dx}|_{x=-a} &= 1; \end{aligned} \quad (9)$$

u_2 — решение задачи Коши для однородного уравнения (7) с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_2|_{x=-a} &= 1, \\ \frac{du_2}{dx}|_{x=-a} &= 0; \end{aligned} \quad (10)$$

u_3 — решение задачи Коши для неоднородного уравнения (7) с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_3|_{x=-a} &= 1, \\ \frac{du_3}{dx}|_{x=-a} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Константы a_1, a_2 находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} a_1 u_1(-a) + a_2 u_2(-a) + u_3 &= 0, \\ a_1 u_1(a) + a_2 u_2(a) + u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Задачи для u_1, u_2, u_3 решались численно с помощью метода Рунге-Кутта 4 порядка.

Результаты моделирования. Рассмотрим результаты моделирования волн в бассейне со стенками, полученные для амплитудной функции вида

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_0 \Psi(x) \sin(\sigma t), \\ \Psi(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Моделирование выполнялось при следующих значениях параметров: $P_0 = 1$ Гна, $a = 550 \cdot 10^3$ м, $h_{max} = 2 \cdot 10^3$ м, $f = 9.9462 \cdot 10^{-5}$ с⁻¹ — соответствует 43° северной широты $\sigma = 0.8\sigma_2 = 4.0429 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹. Здесь σ_2 — частота свободных колебаний второй моды. Размер шага расчетной сетки был выбран равным 100 м.

Графики амплитудной функции скорости u_0 и уровня свободной поверхности ζ_0 , полученные для данных, приведенных выше, и высоты боковых стенок $h=5$ м, $h=10$ м, $h=15$ м, приведены, соответственно, на рисунках 1—6. Рассматривая графики амплитудной функции скорости можно отметить, что функция скорости антисимметрична относительно центра бассейна, максимальных по абсолютной величине значений она достигает на расстоянии примерно 380—350 км от центра бассейна (для высоты боковых стенок $h=10$ —15 м). Причем, точки экстремумов скорости с ростом высоты боковых стенок смещаются к центру бассейна, уменьшаясь по абсолютной величине. Если

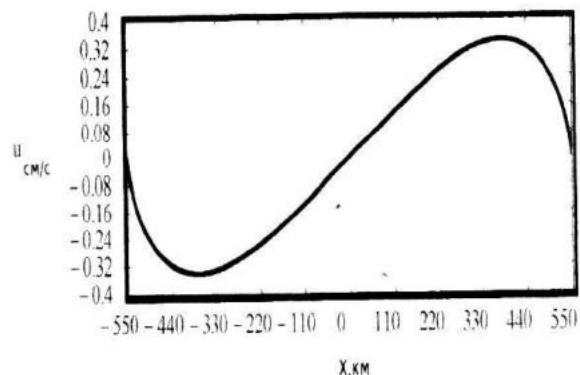


Рисунок 1 — График амплитудной функции проекции скорости по оси ох, $h=5$ м

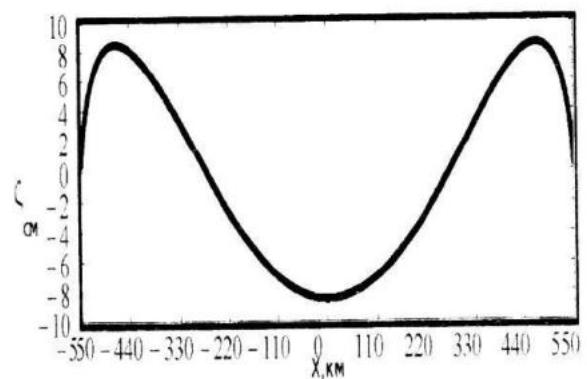


Рисунок 2 — График амплитудной функции профиля свободной поверхности, $h=5$ м

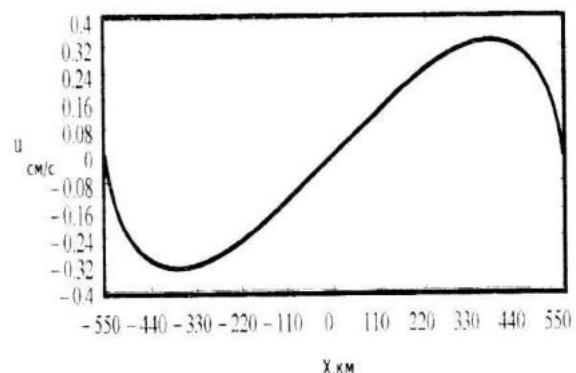


Рисунок 3 — График амплитудной функции проекции скорости по оси ох, $h=10$ м

для $h=5$ м максимум модуля скорости достигался при $|x| = 376.2$ км, то при $h=15$ м — $|x| = 352.4$ км. Амплитудная функция свободной поверхности симметрична относительно центра; для её максимумов также характерно смещение к центру с убыванием по абсолютной величине с ростом высоты боковых стенок.

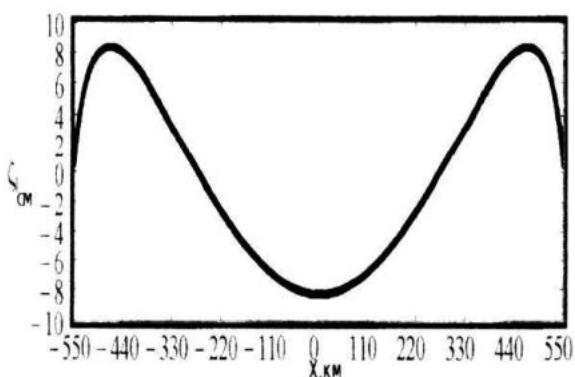


Рисунок 4 – График амплитудной функции профиля свободной поверхности, $h=10$ м

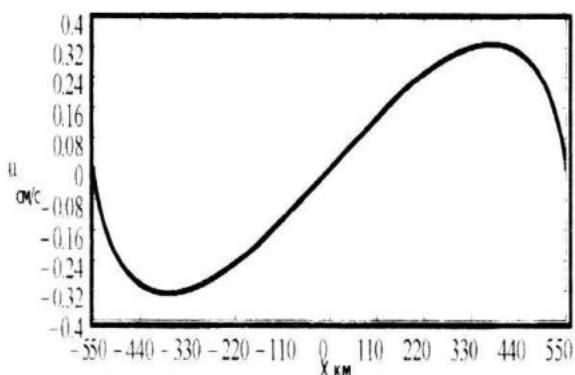


Рисунок 5 – График амплитудной функции проекции скорости по оси ox , $h=15$ м

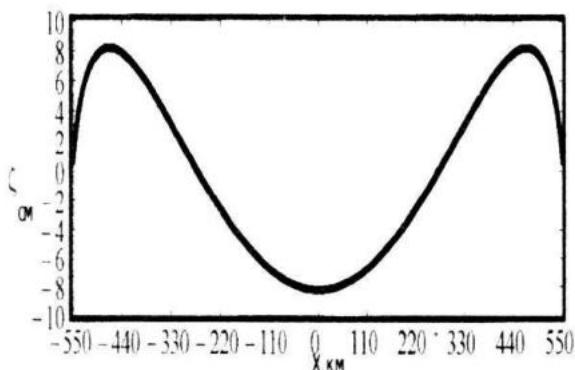


Рисунок 6 – График амплитудной функции профиля свободной поверхности, $h=15$ м

Значения максимумов скоростей и амплитуд для различных высот боковых стенок приведены в таблице 1; можно видеть, что с возрастанием высоты боковых стенок с 5 до 15 м максимальные значения скорости (по абсолютной величине) и амплитуды уменьшаются примерно на 3.7 % и 2.9 % соответственно.

Таблица 1 Зависимость максимальной амплитуды и скорости волн от высоты боковых стенок

Высота стенок, м	Максимальная скорость, см/с	Максимальная амплитуда, см
5	0.328	8.14
10	0.321	8.02
15	0.316	7.91

Также было проведено исследование зависимости скорости волн от значения параметра Кориолиса, для высоты боковых стенок $h=15$ м. Данные приведены в таблице 2.

Таблица 2 Зависимость максимальной амплитуды и скорости волн от значения параметра Кориолиса

Параметр Кориолиса, c^{-1}	Макс. амплитуда, см	Макс. скорость, мм/с
0	8.255	3.28
$9.9 \cdot 10^{-6}$	8.251	3.28
$1.9892 \cdot 10^{-5}$	8.241	3.27
$2.98 \cdot 10^{-5}$	8.224	3.27
$3.08 \cdot 10^{-5}$	8.20	3.26
$4.97 \cdot 10^{-5}$	81.69	3.25
$5.97 \cdot 10^{-5}$	8.13	3.23
$6.96 \cdot 10^{-5}$	8.09	3.22
$7.96 \cdot 10^{-5}$	8.037	3.16
$8.95 \cdot 10^{-5}$	7.98	3.18

С увеличением параметра Кориолиса с 0 до $8.95 \cdot 10^{-5} c^{-1}$, наблюдается уменьшение максимальных значений скорости и амплитуды примерно на 3 % и 3.1 % соответственно.

Л и т е р а т у р а

1.Л.В. Черкесов, В.Л. Иванов, С.М. Хартиев. Введение в гидродинамику и теорию волн. — С.-Пб.: Гидрометеоиздат, 1992. — 246 с.