ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ

С.В. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ko4ep@mail.ru

В работе строятся различные аппроксимации сопряженной задачи, согласованные с основной постановкой. Аппроксимация сопряженной задачи находится из разностного аналога интегрального тождества.

Иногда при реализации алгоритмов усвоения данных измерений требуется согласованность между собой разностных дискретизаций основной и сопряженной задачи [1]. Поэтому рассмотрим следующее уравнение переноса пассивной примеси в области интегрирования $D_t = D\times[0,\bar t]$,

$$\begin{gathered}\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial UC}{\partial x}+\frac{\partial VC}{\partial y}+\frac{\partial WC}{\partial z}=k\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}+A\Delta C\\ \Gamma:\frac{\partial C}{\partial n}=0\\ t=0: C(x,y,z)=C_0(x,y,z).\end{gathered}\tag{1}$$

Уравнению (1) поставим в соответствие формально-сопряженное

$$\begin{gathered}-\frac{\partial C^*}{\partial t}+U\frac{\partial C^*}{\partial x}+V\frac{\partial C^*}{\partial y}+W\frac{\partial C^*}{\partial z}=\\ =k\frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2}+A\Delta C^*,\end{gathered}\tag{2}$$

которое в силу уравнения неразрывности можно переписать в следующем виде

$$\begin{gathered}-\frac{\partial C^*}{\partial t}+\frac{\partial UC^*}{\partial x}+\frac{\partial VC^*}{\partial y}+\frac{\partial WC^*}{\partial z}=\\ =k\frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2}+A\Delta C^*\end{gathered}\tag{3}$$

с краевыми условиями:

$$\Gamma:\frac{\partial C^*}{\partial n}=0$$

и начальными данными:

$$t=\bar t: C^*(x,y,z)=Q(x,y,z),$$

где Г – граница области D; $[0,\bar t]$ – интервал времени на котором происходит интегрирование уравнений (1), (2), причем сопряженная задача решается в обратном направлении по времени.

В качестве $Q(x,y,z)$ могут задаваться либо δ – функции при построении функции влияния, либо сами невязки прогноза [1], характеризующие отклонение решения (1) от данных измерений. При численной реализации (1) дискретизация диффузионных членов не вызывает сомнения и из разностного аналога интегрального тождества дискретизация диффузионных членов сопряженной задачи остается такой же. Дискретизация производной по времени также остается аналогичной, но задача решается в обратном направлении по времени. Основные отличия появляются при разностной аппроксимации адвективных членов.

Запишем аппроксимацию центральной разностью

$$\frac{\partial UC}{\partial x}\approx\frac{U_{i+1/2}C_{i+1}-U_{i-1/2}C_{i-1}}{2\Delta x}.\tag{4}$$

Помножая на C_i^*, суммируя по «i» и производя суммирование по частям с учетом краевых условий, получим

$$\begin{gathered}\sum_i\frac{U_{i+1/2}C_{i+1}-U_{i-1/2}C_{i-1}}{2\Delta x}C_i^*=\\ =-\sum_i\frac{U_{i+1/2}C^*_{i-1}-U_{i-1/2}C^*_{i+1}}{2\Delta x}C_i\end{gathered}\tag{5}$$

откуда имеем

$$\frac{\partial UC^*}{\partial x}\approx\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{2\Delta x}.\tag{6}$$

То есть при аппроксимации адвективных членов схемой центральных разностей, согласованной схемой для дискретизации адвективных челнов сопряженной задачи является схема центральных разностей.

Аппроксимация направленными разностями.

Пусть $U>0$, тогда:

$$\frac{\partial UC}{\partial x}\approx U_{i-1/2}\left(\frac{C_i-C_{i-1}}{\Delta x}\right)\tag{7}$$

Из разностного аналога интегрального тождества имеем

$$\frac{\partial UC^*}{\partial x}\approx\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}-U_{i-1/2}C^*_i}{\Delta x}\tag{8}$$

Аналогично, если $U<0$, получаем

$$\frac{\partial UC}{\partial x}\approx U_{i+1/2}\left(\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x}\right)\tag{9}$$

Тогда из разностного аналога интегрального тождества имеем

$$\frac{\partial UC^*}{\partial x}\approx\frac{U_{i+1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{\Delta x}\tag{10}$$

Отметим, что при $U = const$, аппроксимация (8), совпадает с аппроксимацией (9), а (7) с (10). То есть при аппроксимации основной задачи разностью вперед, сопряженную задачу необходимо аппроксимировать разностью назад. Оценим погрешность аппроксимации сопряженной задачи, если вместо (10) используется аппроксимация (7), то есть знак минус перед адвективным членом учтен в скорости. То есть аппроксимации абсолютно идентичны в случае выполнения уравнения неразрывности в трехмерном случае, а так же при $U = const$. Как видно из (8), (10), данные аппроксимации являются вариантами дискретизаций направленными разностями. Причем,

если $\frac{\partial UC}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1/2}C_{i+1} - U_{i-1/2}C_i}{\Delta x}$, то

$$\frac{\partial UC^*}{\partial x} \approx U_{i-1/2}\left(\frac{C_i^* - C_{i-1}^*}{\Delta x}\right), \qquad (11)$$

если $\frac{\partial UC}{\partial x} \approx \frac{U_{i+1/2}C_i - U_{i-1/2}C_{i-1}}{\Delta x}$, то

$$\frac{\partial UC^*}{\partial x} \approx U_{i+1/2}\left(\frac{C_{i+1}^* - C_i^*}{\Delta x}\right) \qquad (12)$$

Рассмотрим следующую консервативную монотонную разностную схему [2]

$$\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\left[k\left(1+R_{i+1/2}\mu_{i+1/2}+R_{i+1/2}\right)\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x}\right] - \frac{1}{\Delta x}\left[k\left(1+R_{i-1/2}\mu_{i-1/2}+R_{i-1/2}\right)\frac{C_i-C_{i-1}}{\Delta x}\right] = 0$$

где $R_{i+1/2} = -\frac{U_{i+1/2}\Delta x}{2k}$,

$$\mu(R) = \begin{cases} cthR - \frac{1}{R} & \textit{схема Ильина} \\ signR & \textit{схема напр. разностей} \\ 0 & \textit{схема центр. разностей} \end{cases}$$

Согласованная с ней схема для сопряженной задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} &-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t} - \\ &-\frac{k}{\Delta x^2}\left(1+R_{i+1/2}\mu_{i+1/2}-R_{i+1/2}\right)C^*_{i+1} + \\ &+\frac{k}{\Delta x^2}\left(1+R_{i+1/2}\mu_{i+1/2}+R_{i+1/2}\right)C^*_i + \\ &+\frac{k}{\Delta x^2}\left(1+R_{i-1/2}\mu_{i-1/2}-R_{i-1/2}\right)C^*_i - \\ &-\frac{k}{\Delta x^2}\left(1+R_{i-1/2}\mu_{i-1/2}+R_{i-1/2}\right)C^*_{i-1} = 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Рассмотрим (13) при $\mu = 0$

$$\begin{aligned} &\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t} = k\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta x^2} - \\ &-\frac{U_{i+1/2}C_{i+1}-U_{i+1/2}C_i+U_{i-1/2}C_i-U_{i-1/2}C_{i-1}}{2\Delta x} \end{aligned} \qquad (14)$$

То есть адвективный член аппроксимируется аналогом центрально-разностной аппроксимации. Аналогично из (13) имеем при $\mu = \operatorname{sgn} R$ и $U < 0$

$$\begin{aligned} &\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t} = k\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{\Delta x^2} - \\ &-U_{i+1/2}\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x} \end{aligned} \qquad (15)$$

И при $U > 0$, получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t} = k\frac{C_{i+1}-2C_i+C_{i-1}}{2\Delta x^2} - \\ &-U_{i-1/2}\frac{C_i-C_{i-1}}{\Delta x} \end{aligned} \qquad (16)$$

Из уравнения (13) при $\mu = 0$ имеем

$$\begin{aligned} &-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t} = k\frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta x^2} + \\ &+\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}+U_{i+1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{2\Delta x} \end{aligned} \qquad (17)$$

То есть адвективный член аппроксимируется аналогом центрально-разностной аппроксимации. Аналогично из (13) при $\mu = \operatorname{sgn} R$ и $U < 0$, имеем

$$\begin{aligned} &-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t} = k\frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta x^2} + \\ &+\frac{U_{i+1/2}C^*_i-U_{i-1/2}C^*_{i-1}}{\Delta x} \end{aligned} \qquad (18)$$

И при $U > 0$ получаем

$$\begin{aligned} &-\frac{C^{*n+1}-C^{*n}}{\Delta t} = k\frac{C^*_{i+1}-2C^*_i+C^*_{i-1}}{\Delta x^2} + \\ &+\frac{U_{i+1/2}C^*_{i+1}-U_{i-1/2}C^*_i}{\Delta x} \end{aligned} \qquad (19)$$

Как видно из (13) – (19), аппроксимация адвективного члена в основной задаче идентична аппроксимации адвективного члена в сопряженной задаче. Оценим отличия в аппроксимации адвективных членов. Пусть $U < 0$, тогда с учетом знака при адвективном члене в сопряженной задаче выберем соответствующую аппроксимацию

$$U_{i+1/2}\frac{C^{*}_{i+1}-C^{*}_{i}}{\Delta x}-\frac{U_{i+1/2}C^{*}_{i+1}-U_{i-1/2}C^{*}_{i}}{\Delta x}= \\ =-C^{*}_{i}\left(\frac{U_{i+1/2}-U_{i-1/2}}{\Delta x}\right)\approx C^{*}\frac{\partial U}{\partial x} \tag{20}$$

При решении трехмерной задачи при условии выполнения уравнения неразрывности такие члены по всем трем направления в сумме обращаются в ноль. Кроме этого они обнуляются и при $U = const$.

Рассмотрим центрально-разностную аппроксимацию (14) и вычтем аппроксимацию адвективного члена в сопряженной задаче (17)

$$\frac{U_{i+1/2}C^{*}_{i+1}-U_{i+1/2}C^{*}_{i}+U_{i-1/2}C^{*}_{i}-U_{i-1/2}C^{*}_{i-1}}{\Delta x}- \\ -\frac{U_{i+1/2}C^{*}_{i+1}+U_{i+1/2}C^{*}_{i}-U_{i-1/2}C^{*}_{i}-U_{i-1/2}C^{*}_{i-1}}{\Delta x}= \\ =-C^{*}_{i}\frac{U_{i+1/2}-U_{i-1/2}}{\Delta x}\approx -C^{*}\frac{\partial U}{\partial x} \tag{21}$$

То есть и в данном придельном случае при $\mu = 0$, аппроксимации основной и сопряженной задач идентичны при условии выполнения уравнения неразрывности. Поэтому и в данном случае для решения сопряженной задачи можно использовать процедуры, применяемые при интегрировании основной задачи.

Часто при решении задач переноса пассивной примеси полезными оказываются так называемые TVD аппроксимации [3]. В силу того, что аппроксимация вязкостных членов не претерпевает изменений, продемонстрируем особенности построения TVD схем для сопряженной задачи на одномерном примере. Пусть имеем следующее уравнение переноса

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0, \tag{22}$$

где $F = UC$ – поток вещества; U – скорость переноса.

Аппроксимация (22) имеет вид:

$$\frac{C^{n+1}_{i}-C^{n}_{i}}{\Delta t}=\frac{F_{i+1/2}-F_{i-1/2}}{\Delta x} \tag{23}$$

Схема направленных разностей получается при следующей аппроксимации потоков

$$F^{G}_{i+1/2}=\begin{cases}U_{i+1/2}C_{i},U_{i+1/2}\geq 0\\ U_{i+1/2}C_{i+1},U_{i+1/2}<0\end{cases},$$

а схема Лакса-Вендраффа при

$$F^{L}_{i+1/2}=U_{i+1/2}\left[\frac{C_{i+1}C_{i}}{2}-\frac{\lambda_{i+1/2}}{2}\left(C_{i+1}-C_{i}\right)\right], \tag{24}$$

где $\lambda_{i+1/2}=\dfrac{U_{i+1/2}\Delta t}{\Delta x}$ – число Куранта.

Для решения (22) строится TVD схема в которой используется комбинация этих двух схем

$$F_{i+1/2}=F^{G}_{i+1/2}+\psi(C)*\left(F^{L}_{i+1/2}-F^{G}_{i+1/2}\right), \tag{25}$$

где $\psi(C)$ – весовой множитель, зависящий от решения, который определяется из условия TVD [3]

$TV\left(C^{n+1}\right)\leq TV\left(C^{n}\right)$,

где $TV(C)=\sum_{i}\left|C_{i}-C_{i-1}\right|$ – общая вариация численного решения.

Мы уже показали, что схема направленных разностей переходит в аналогичную схему для решения сопряженной задачи. Ананлогичный результат можно получить для схемы Лакса-Вендроффа.

То есть оба предельные случаи в TVD схеме являются согласованными с соответствующими аппроксимациями при решении основной задачи.

Литература

1. В.В. Пененко. Методы численного моделирования атмосферных процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 352 с.
2. В.Н. Еремеев, В.П. Кочергин, С.В. Кочергин, С.Н. Скляр. // Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов – Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002. – 238 с.
3. A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, I. Comput. Phys. – 1983, P. 353 – 393.