ИНФОРМАЦИОННЫЙ ИМПЕДАНС ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ТРАКТА

Ю.В. Коваленко

Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская 33, г. Севастополь,
E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

Исследована зависимость информационного импеданса от параметров распределения измеряемой величины и её погрешности, на примере измерительного тракта.

В предлагаемой работе исследуется поведение информационного импеданса (I-impedance) измерительного тракта при различных параметрах распределения, как измеряемой величины, так и параметров распределения погрешности прибора. Пусть, для простоты, измеряемая величина и приборная погрешность имеют равномерный закон распределения, рисунок 1.

Границы распределения измеряемой величины X_1 и X_2 представляют собой нижнее и верхнее значение шкалы измерительного прибора соответственно, X_M – значение, полученное после измерения, ΔX – погрешность прибора.

Согласно рисунку 1, интервал неопределённости измеряемой величины до измерения определяется диапазоном средства измерения $X_2 - X_1$, а интервал неопределённости измеряемой величины после измерения, т.е. после получения показания X_M, определён погрешностью прибора $2\Delta X$. Сравнивая интервалы неопределённости до и после измерения, можно сделать вывод, что процесс измерения, с точки зрения теории информации, можно определить как уменьшение интервала неопределённости измеряемой величины. Количество получаемой при измерении информации, согласно Шеннону, определяется разностью энтропий:

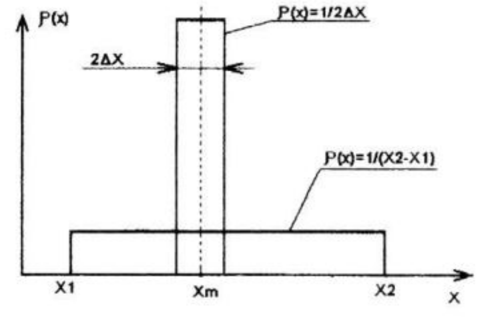

Рисунок 1 – Интервалы неопределённости до и после измерения

$$I(X, X_M) = H(X) - H(X / X_M), \quad (1)$$

где $H(X)$ – энтропия величины X до её измерения, а $H(X / X_M)$ – энтропия величины X, полученная после снятия показания X_M, или энтропия погрешности измерения.

Согласно [1] выражение для I-impedance можно записать как

$$Z_{XX_M} = H(X / X_M) / I(X, X_M). \quad (2)$$

Если для дискретной величины применимость выражения (2) не вызывает затруднений, для непрерывной, напротив, имеются ограничения, связанные с тем, что энтропия для непрерывных величин равна бесконечности. Однако, эта ситуация не является безвыходной.

Известно, что энтропия непрерывного источника складывается из так называемой дифференциальной энтропии

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx$$

и выражения $\lim_{\Delta x \to 0} \log 1 / \Delta x$. Из-за этого расходящегося члена для общей энтропии получаем, строго говоря, бесконечное значение, что вполне понятно из физических соображений. Таким образом, непрерывные сигналы не имеют абсолютной энтропии.

Поэтому для них целесообразно было

бы ввести понятие относительной энтропии [2]. Так как, для ограниченной на конечном интервале ε случайной величины x_U (например, диапазоном измерения), максимальная энтропия получается при равномерном распределении (*U-union*), представляется оправданным его выбор в качестве эталонного источника сообщений при введении понятия дифференциальной энтропии. Энтропию такого источника можно записать в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} H(x_U) = \log \varepsilon - \lim_{\Delta x \to 0} \log \Delta x .$$

Тогда неопределённость непрерывной величины можно характеризовать числом, к которому стремится разность энтропий

$$H_E(x) = \lim_{\Delta x \to 0}[H(x) - H(x_U)] = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)dx - \log\varepsilon = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log \varepsilon\ p(x)dx . \quad (3)$$

При $\varepsilon = 1$, выражение (3) перепишется в виде

$$H_{E=1}(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log\ p(x)dx. \quad (4)$$

Полученное выражение представляет собой относительную меру энтропии, где за стандарт взята равномерно распределённая на единичном интервале величина. Величину $H_{E=1}(x)$ в литературе называют дифференциальной ипсилон-энтропией (ε-энтропией), где индекс $\varepsilon = 1$ обычно опускают.

Необходимо отметить, что дифференциальная ε – энтропия может быть как отрицательной, так и положительной, а 'уровень нуля' определится величиной параметра ε.

Отсюда, энтропия $H(X)$ до измерения с учётом равномерного распределения измеряемой величины и, согласно (4), составит

$$H(X) = -\int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{X_2 - X_1} \ln \frac{1}{X_2 - X_1} dx = \ln(X_2 - X_1) = \frac{1}{2}\ln 12\sigma^2 ,$$

где σ – с.к.о. измеряемой величины.

Аналогично, остаточная энтропия $H(X / X_M)$ после измерения, для прибора с равномерным распределением погрешности

$$H(X / X_M) = -\int_{X_M - \Delta X}^{X_M + \Delta X} \frac{1}{2\Delta X} \ln \frac{1}{2\Delta X} dx = \ln(2\Delta X) = \frac{1}{2}\ln 12\sigma_M^2 , \quad (5)$$

где σ_M – с.к.о. погрешности измерения.

Полученное в результате измерения количество информации $I(X, X_M)$ равно разности исходной и остаточной энтропий

$$I(X, X_M) = H(X) - H(X / X_M) = \ln\frac{X_2 - X_1}{2\Delta X} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sigma^2}{\sigma_M^2} = \ln N , \quad (6)$$

где N – число различимых градаций измеряемой величины, которое позволит получить используемое средство измерения.

Тогда, I-impedance измерительного тракта для этого случая

$$Z_{XX_M} = H(X / X_M) / I(X, X_M) = \frac{\ln 2\Delta X}{\ln\dfrac{X_2 - X_1}{2\Delta X}} = \frac{\ln 12\sigma_M^2}{\ln\dfrac{\sigma^2}{\sigma_M^2}} = \frac{\ln(\sqrt{12}\sigma_M)}{\ln(\sigma / \sigma_M)} . \quad (7)$$

Результат моделирования выражений (5), (6) и (7) представлен на рисунке 2. Диапазон изменения измеряемой величины лежит в пределах от 0 до 3, чему соответствуют асимптоты, соответствующие этим значениям. В пределах диапазона изменения измеряемой величины (0,3) кривая для I-impedance соответствует процессу получения полезной информации, в пределах же от 3 до $+\infty$ – дезинформации. При $\varepsilon = 1$, и изменении σ_M от $-\infty$ до $+\infty$, I-impedance стремится к значению -1.

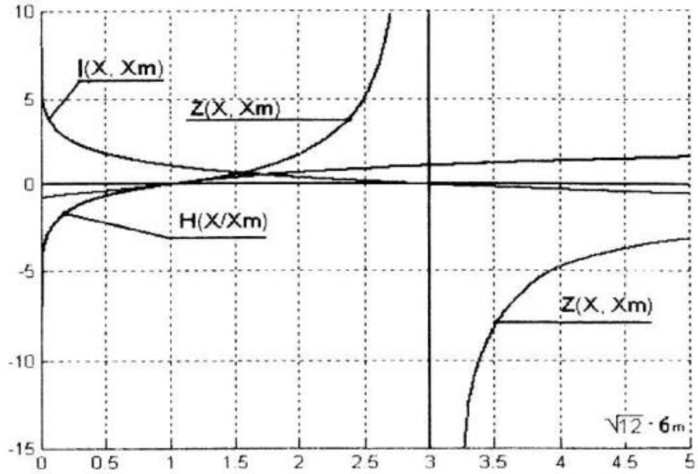

Рисунок 2 – Графические зависимости полученной при измерении информации I(X, Xm), остаточной энтропии H(X/Xm) и информационного импеданса Z(X, Xm) от с.к.о. (σ_m) погрешности измерения, распределённой по равномерному закону

Теперь рассмотрим случай, когда как измеряемая величина, так и погрешность измерения распределены по нормальному закону. Найдём выражение для $H(X/X_M)$ предполагая диапазон её изменения в идеале бесконечным. Положим, для простоты, математическое ожидание для погрешности равным нулю. Забегая наперёд можно сказать, что параметр математического ожидания, как для измеряемой величины, так и для погрешности измерения является незначимым. Тогда плотность вероятности будет равна

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma_M\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_M^2}\right).$$

Прологарифмируем это выражение

$$\ln\rho(x) = -\left(\ln(\sigma_M\sqrt{2\pi}) + \frac{x^2}{2\sigma_M^2}\right).$$

Отсюда

$$H(x/x_M) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\ln\rho(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\left(\ln(\sigma_M\sqrt{2\pi}) + \frac{x^2}{2\sigma_M^2}\right)dx =$$

$$= -\ln\sigma_M\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)dx + \frac{1}{2\sigma_M^2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\rho(x)dx = \frac{1}{2}\ln 2\pi e\sigma_M^2. \qquad (8)$$

Для нахождения величины $H(X)$ можно воспользоваться аналогичной подстановкой с той разницей, что для измеряемой величины необходимо указать диапазон измерения (от X_1 до X_2). Отсюда энтропия для заданного диапазона измерения измеряемой величины с нормальным законом распределения будет выглядеть согласно выражению (9). Воспользовавшись зависимостями (1) и (2) получим выражение для I-impedance при нормальном законе распределения (10)

$$H(x) = -\int_{X1}^{X2}\rho(x)\ln\rho(x)dx = \int_{X1}^{X2}\rho(x)\left(\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{(x-Mx)^2}{2\sigma^2}\right)dx. \qquad (9)$$

$$Z_{XX_M} = \frac{1}{2}\ln 2\pi e\sigma_M^2 \Bigg/ \left(\int_{X1}^{X2}\rho(x)\left(\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{(x-Mx)^2}{2\sigma^2}\right)dx - \frac{1}{2}\ln 2\pi e\sigma_M^2\right). \qquad (10)$$

Совместный анализ поведения графических зависимостей (рисунок 3 и рисунок 4), построенных согласно выражениям (7) и (10) для равномерного и нормального распределений измеряемой величины, показал, что величина I-impedance зависит от вида распределения, величины диапазона, с.к.о. измеряемой величины и с.к.о. погрешности. Манипулируя этими параметрами, можно управлять величиной I-impedance и соответственно количеством получаемой информации.

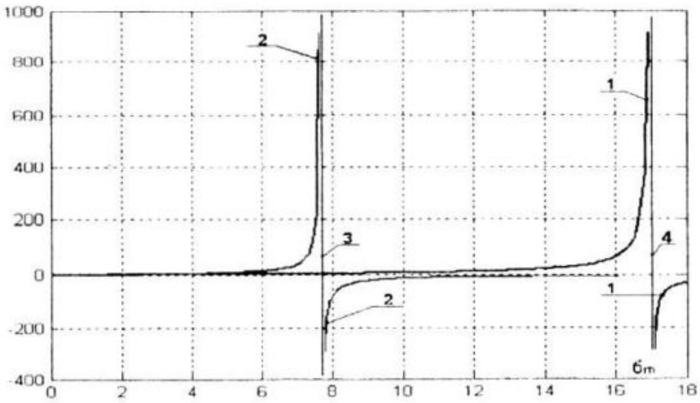

Рисунок 3 – Графики информационного импеданса при нормальном (2) и равномерном (1) распределении измеряемой величины. 3 и 4 – асимптоты. С.к.о. для нормального и равномерного распределения измеряемой величины $\sigma = 17$, диапазон для измеряемой величины, распределённой по нормальному закону $a = 15$ и $b = 65$, диапазон для измеряемой величины, распределённой по равномерному закону $a = 0$ и $b = 24.248$

Из рисунков видно, что при нормальном законе распределения I-impedance растёт быстрее, чем при равномерном законе. Однако, изменяя лишь границы диапазона измерения, можно добиться практически полного совпадения кривых 1 и 2. К аналогичным результатам приводит и изменение величины σ. В заключение необходимо отметить, что расстояние между асимптотами 3 (искомого нормального) и 4 (эталонного равномерного) зависит от соотношения между величиной диапазона измерения и с.к.о. (σ) искомой величины.

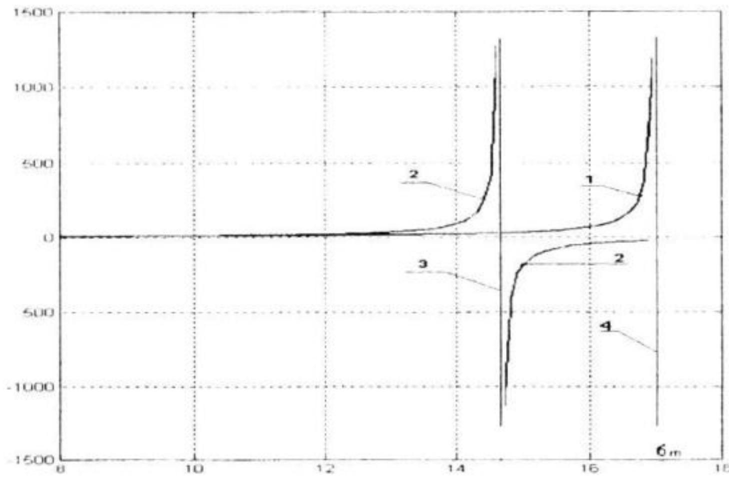

Рисунок 4 – Графики информационного импеданса при нормальном (2) и равномерном (1) распределении измеряемой величины. 3 и 4 – асимптоты. С.к.о. для нормального и равномерного распределения измеряемой величины $\sigma = 17$, диапазон для измеряемой величины, распределённой по нормальному закону $a = 0$ и $b = 79$, диапазон для измеряемой величины, распределённой по равномерному закону $a = 0$ и $b = 24.248$

Целью дальнейших исследований является применение понятия I-impedance к анализу систем различной природы.

Литература

1. Моделирование нелинейных процессов и систем. Сборник тезисов Международной научной конференции. – М.: МГУП, 2008. – 189 с.

2. Кузин Л.Т. Основы кибернетики. Т. 1. Математические основы кибернетики. Учеб. пособие для студентов втузов. / Кузин Л.Т. – М.: Энергия, 1973. – 504 с.