

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

В.С. Кочергин, С.В. Кочергин

Морской гидрофизический институт
НАН Украины
г. Севастополь, ул. Капитанская, 2
E-mail: ko4ep@mail.ru

В работе анализируется скорость сходимости итерационного процесса в зависимости от применяемых разностных аппроксимаций. Используется функционал специального вида для улучшения скорости сходимости при идентификации входных параметров модели.

Основы вариационного подхода идентификации входных параметров модели заложены в работах [1–5]. В работах [6,7] для уравнения переноса пассивной примеси в Черном море осуществлена идентификация начальных полей, коэффициентов модели, что позволило получить хорошее соответствие модельных оценок с данными измерений, в том числе получаемых с ИСЗ. При численной реализации модели переноса применялись TVD аппроксимации [8,9], поэтому интересно исследовать чувствительность итерационной процедуры поиска оптимальных параметров модели к различным способам аппроксимации адвективных членов.

Рассмотрим чувствительность итерационной процедуры усвоения данных измерений, основанной на решении сопряженной задачи к используемым аппроксимациям при численной реализации одномерной модели переноса пассивной примеси. Модель интегрируется в области D на интервале времени $[0, \bar{t}]$. Рассмотрим простейшее одномерное уравнение:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = k \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad \Gamma: C = 0, \quad t = 0: C = C_0, \quad (1)$$

где C – концентрация примеси; $U = const$; $k = const$; Γ – граница области интегрирования.

Пусть на момент времени \bar{t} имеются данные измерений о поле концентрации $C_{изм}$, тогда задача идентификации параметров модели (1) состоит в нахождении минимума функционала:

$$I_0(C) = \frac{1}{2} (C - C_{изм}, C - C_{изм})_{D, \bar{t}}, \quad (2)$$

где скалярное произведение определено следующим образом:

$$(C, C^*)_{D, \bar{t}} = \int_{D, \bar{t}} C \cdot C^* dD_t = \int_0^{\bar{t}} \int_D C \cdot C^* dD dt. \quad (3)$$

Минимизация квадратичного функционала (2) осуществляется при условии, что C является решением модели (1). Поэтому, поиск минимума (2) при ограничениях (1) эквивалентно минимизации следующего функционала:

$$I(C) = I_0(C) + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} - k \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, C^* \right) + (C, C^*)_{\Gamma, \bar{t}} - (C - C_0, C^*)_{D, t=0}. \quad (4)$$

Следуя [2] выбираем множители Лагранжа как решение сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial C^*}{\partial t} - U \frac{\partial C^*}{\partial x} - k \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} &= 0, \\ \Gamma: C^* &= 0, \\ t = \bar{t}: C^* &= \nabla_{C_0} I(C). \end{aligned} \quad (5)$$

Из условия стационарности функционала имеем:

$$\nabla_{C_0} I(C) = C^*|_{t=0}. \quad (6)$$

В пространстве параметров необходимо осуществлять спуск в направлении этого градиента:

$$C_0^{n+1} = C_0^n + \tau \nabla_{C_0} I(C), \quad (7)$$

где τ – некоторый итерационный параметр.

Численные эксперименты проводились при следующих значениях входных параметров модели: $U = 10 \text{ см/с}$, $\Delta x = 1.4 \cdot 10^6 \text{ см}$, $\Delta t = 1.2 \cdot 10^3 \text{ с}$, $A_M = 10^6 \text{ см}^2/\text{с}$.

Аппроксимация диффузионного члена производится стандартным образом, поэтому для простоты рассмотрим следующее одномерное уравнение переноса:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где $F = UC$ – поток вещества; U – скорость переноса.

Вводя равномерную сетку с малым шагом Δx по пространству и Δt по времени, определяем:

$$C_i^n = C(x_i, t_n), U_{i+1/2}^n = U(x_{i+1/2}, t_n), \\ F_{i+1/2}^n = F(x_{i+1/2}, t_n), x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i)/2.$$

Запишем явную разностную схему для решения (8):

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{\Delta x}{\Delta t} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n). \quad (9)$$

Для аппроксимации потоков введем две схемы:

– схема направленных разностей

$$F_{i+1/2}^G = \begin{cases} U_{i+1/2} C_i, U_{i+1/2} \geq 0 \\ U_{i+1/2} C_{i+1}, U_{i+1/2} < 0 \end{cases} \quad (10)$$

– схема Лакса-Вендрафа

$$F_{i+1/2}^L = U_{i+1/2} \left[\frac{1}{2} (C_{i+1} + C_i) - \frac{\lambda_{i+1/2}}{2} (C_{i+1} - C_i) \right] \quad (11)$$

Схема (11) немонотонная, второй порядок аппроксимации, где $\lambda_{i+1/2} = U_{i+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x}$ – число Куранта. Схема (10) является монотонной, имеет первый порядок аппроксимации и большую схемную вязкость.

Монотонная TVD схема [9] имеет вид:

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^G + \psi_{i+1/2} (F_{i+1/2}^L - F_{i+1/2}^G), \quad (12)$$

где весовой множитель ψ зависит от градиентов решения и определяется из условия TVD:

$$TV(C^{n+1}) \leq TV(C^n), \quad (13)$$

где $TV(C) = \sum_i |C_i - C_{i-1}|$ – общая вариация численного решения.

Согласно [9], выполнение условия (13) для всех n гарантирует монотонность решения задачи (9). При $\psi = 0$ схема (12) переходит в схему (10), а при $\psi = 1$ – в схему (11). Необходимое условие устойчивости выполняется из-за условия Куранта. Выражения для выбора ψ могут иметь следующий вид [9]:

– схема Minmod

$$\psi(r) = \max(0, \min(1, r)) \quad (14)$$

– схема Superbee

$$\psi(r) = \max(0, \min(1, 2r), \min(2, r)) \quad (15)$$

– схема MUSCL

$$\psi(r) = \max\{0, \min[2, 2r, (1+r)/2]\} \quad (16)$$

Критерием работоспособности вариационных методов усвоения выступает нор-

мированный функционал качества прогноза на его первоначальное значение. По этой характеристике всегда удобно судить о том, как происходит минимизация функционала и с какой скоростью сходится итерационная процедура. Поэтому мы будем следить за этой характеристикой при проведении расчетов, использующих разные TVD-аппроксимации. На рисунке 1 представлено падение функционала для различных аппроксимаций.

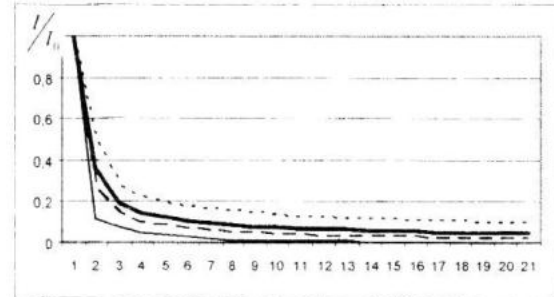


Рисунок 1 – Падение нормированного значения функционала в процессе итераций (Superbee – тонкая сплошная линия, MUSCL – штриховая, Minmod – толстая сплошная, направленных разностей – пунктирная)

Решая одномерную задачу по восстановлению начальных данных при помощи вариационного алгоритма идентификации, мы получили, что наилучшая сходимость итерационной процедуры получается при использовании схемы (15), причем, хорошо восстанавливается начальный профиль как по своему местоположению, так и по значениям. Из рисунка 1 видно, что наихудшая сходимость получается при использовании схемы направленных разностей, схема (14) дает уже лучший результат. Использование схемы (15) приводит к более быстрой сходимости итерационного процесса.

Из рисунка 2 видно, что при идентификации поля скорости на первых итерациях структура функционала такова, что наблюдается плохая сходимость итерационного процесса. На рисунке 3 показано восстановление истинного значения скорости в процессе итераций. Процесс сходимости можно ускорить за счет выбора начальных скоростей, приближенных к истинным значениям, что является оправданным в силу линеаризации модели в предположении малости возмущений.

Литература

1. Sasaki Y. A fundamental study of the numerical prediction based on the variational principle // *Journal of the Meteorological Society of Japan*, Ser. 2, Vol. 33, No 6, Dec. 1955. – P. 262–275.

2. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоздат, 1981. – 352 с.

3. Le Dimet, F.-X., and O.Talagrand Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations. Theoretical aspects. *Tellus, ser.A.*,38A,1986. P. 97–110

4. Yu, L., and P.Malanotte-Rezzoli, Inverse modeling of seasonal variations in the North Atlantic Ocean. *J.Phys.Oceanogr.*, 28, 902, 1998.

5. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.

6. Еремеев В.Н., Демьшев С.Г., Кочергин С.В., Кочергин В.С. Идентификация начальных данных в трехмерной модели переноса пассивной примеси в Черном море. // *Морской экологический журнал* № 3, Севастополь 2007. – 36–46 с.

7. Кочергин С.В., Кочергин В.С. Идентификация начальных данных в модели переноса пассивной примеси // В Сб.: «Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа», МГИ НАНУ, Севастополь 2005. – 369–373с.

8. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, I. *Comput. Phys.* – 1983, P. 353–393.

9. Pietrzak J. The use of TVD limiters for forward-time upstream-biased advection schemes in ocean modeling – *Mon. Wea. Rev.*, 1998, vol. 126, P. 812–830.

10. Yu L., and J.J.O'Brien, 1992: On the initial condition in parameter estimation. *J.Phys.Oceanogr.*, 22, P. 1361–1364

11. Smedstat, O.M., and J.J. O'Brien, 1991: Variational data assimilation and parameter estimation in an equatorial Pacific Ocean model. *Progress in Oceanography*. Vol. 26, Pergamon, P. 179–241.

12. Yu, L., and J.J.O'Brien, 1991: Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile. *J.Phys.Oceanogr.*, P. 21, 709–719.

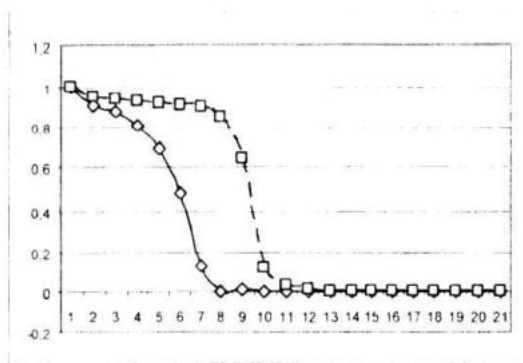


Рисунок 2 – Падение нормированного значения функционала в процессе итерации (сплошная линия – минимизируется функционал (17), пунктирная линия – минимизируется функционал(2))

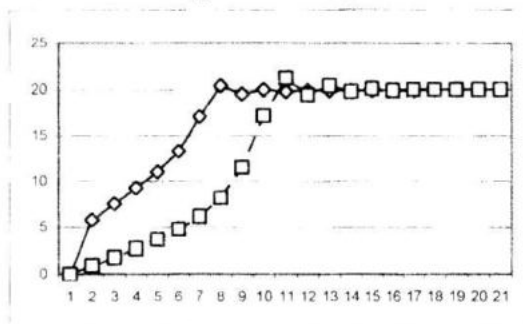


Рисунок 3 – Восстановление скорости

Процесс переноса можно заменить другим процессом на первых итерациях, например диффузией. Этот способ формально можно записать в виде дополнительного члена в функционале:

$$I_0(C) = \frac{1}{2} (C - C_{изм}, C - C_{изм})_{D_0} + \alpha \left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (17)$$

где $\alpha \rightarrow 0$ в процессе итераций. При решении подобного рода задач добавляются аналогичные члены второго порядка [10–12]. Результат использования функционала качества прогноза в виде (17) представлен на рисунке 2. Процесс сходимости существенно улучшается. Следует отметить, что оптимальный выбор итерационного параметра τ так же улучшает скорость сходимости итерационного процесса.

Итак, скорость сходимости итерационного процесса при реализации вариационного алгоритма идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси существенно зависит от выбора итерационного параметра, структуры функционала качества прогноза и от самой схемы численной реализации модели.