

# БИСПЕКТРЫ ОСНОВНЫХ ИНВАРИАНТОВ СПЕКТРАЛЬНОГО ТЕНЗОРА СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЙ У КАВКАЗСКОГО ПОБЕРЕЖЬЯ ЧЕРНОГО МОРЯ

Н.Г. Хоролич\*, П.Д. Ломакин\*\*,  
В.Н. Хоролич\*\*\*

\*Морское отделение Украинского научно-исследовательского гидрометеорологического института

г. Севастополь, ул. Советская, 61  
Email: mb\_uhmi@stel.sebastopol.ua

\*\*Морской гидрофизический институт  
НАН Украины

г. Севастополь, ул. Капитанская, 2

\*\*\*Севастопольский национальный  
технический университет  
г. Севастополь, Студгородок

*Биспектры (бичастотные спектры) линейного инварианта, а также большой и малой осей симметричной части спектрального тензора вектора скорости течений анализируются на основе доказанного в рамках ранее предложенной полуспектральной линейной теории его длинноволнового поведения. С помощью этих характеристик для колебаний скорости течений в близинерционной области частот выявлены их периодичности 7 и 22 – 24 сут.*

В физической океанографии, как известно, в силу, вообще говоря, преобладания колебательного характера поведения скорости течений практически во всех диапазонах их изменчивости (межгодовом, сезонном, синоптическом, мезомасштабном), а также некоторых затруднений, возникающих при использовании ее многомерных функций распределения в теоретических и прикладных исследованиях, применяется спектрально-корреляционная теория.

Спектральное описание скорости течений с физической точки зрения вполне обосновано, так как оно непосредственно выражает интенсивность ее колебаний на разных частотах. Однако в действительности поведение скорости течений проявляется, вообще говоря, в виде суперпозиции отдельных колебательных систем, турбулентных движений, а также неизвестных динамических структур (как правило, циклически сменяющих друг друга). Применимые в физической океанографии методы спектрального анализа вектора скорости

текущий позволяют формализовать эти его особенности в виде спектрального тензора, содержащего о нем наиболее полную информацию [1].

Однако при этом следует иметь в виду один весьма важный момент, которому до сих пор исследователи не уделяли должного внимания. В настоящем исследовании, пожалуй, впервые обращено внимание на то, что с помощью спектральных методов, независимо от формы представления вектора скорости течений, вообще говоря, можно получить, к сожалению, его формализацию только в виде эллиптической поляризации, соответствующей чисто колебательному его характеру поведения (главным образом в горизонтальной плоскости в силу двухмерности течений), поскольку основой обычно этих методов является традиционное преобразование Фурье.

Именно поэтому применяемые в физической океанографии при спектральном анализе вектора скорости течений такие общепринятые на сегодня методы, как метод вращательных компонентов и векторно-алгебраический метод, несмотря на их принципиальное различие в задании физики его поведения, позволяют получить, по сути, только его эллиптическую поляризацию. Как известно, метод вращательных компонентов [2] основан на комплексно-значном представлении векторных временных рядов, т.е. на их представлении в виде суперпозиции круговых вращений с правой и левой поляризацией, тогда как в векторно-алгебраическом методе [1] вектор является евклидовым. Тем не менее, как и следовало ожидать, принципиальных с физической точки зрения различий в результатах анализа, полученных с помощью этих двух методов, в отличие от работы [1], нами не установлено.

Таким образом, на сегодня одним из существенных недостатков спектрально-корреляционной теории является, на наш взгляд, то, что ни один из общепринятых спектральных методов, в силу, главным образом, некоторых неточностей, незавершенности, а также субъективизма самих авторов и большинства их последователей нельзя признать приемлемым с точки зрения его использования для исследования эллипсовидной закономерности в поведении вектора скорости течений по его временной реализации. Кроме того, отсутствие

на сегодня спектральной гидродинамической теории морских течений не позволяет выразить результаты их спектрального анализа в терминах геофизической гидродинамики, что в значительной степени затрудняет их интерпретацию. Поэтому дальнейшее усовершенствование общепринятых методов спектрального анализа скорости течений может значительно ускорить и разработку такой теории.

Цель данной статьи – показать на конкретном примере анализа временной реализации вектора скорости, полученной в результате наблюдений значительной продолжительности, что успешное разрешение, по крайней мере, этих двух затронутых выше проблем может обеспечить существенный прогресс в исследовании морских течений. Эти проблемы довольно подробно уже рассматривались в [3 – 7]. В настоящей работе получили дальнейшее развитие и уточнение их некоторые моменты, касающиеся исследования многофакторности, разномасштабности, полигоничности, турбулентности, гармонического характера (включая и волновой), нестационарности и других форм проявления вектора скорости течений [7]. Кроме того, значительное внимание удалено также сравнительному анализу применяемых в данной работе уже упомянутых выше таких общепринятых на сегодня спектральных методов, как метод вращательных компонентов и векторно-алгебраический метод.

Отмеченные выше особенности поведения скорости течений в предложенном примере исследуются в предположении, что в некоторых хотя и простых, но довольно характерных случаях, она может быть градиентного происхождения и иметь при этом длинноволновую структуру, которая в рамках ранее разработанной полуспектральной линейной теории, в принципе, может быть доказана с помощью так называемого критерия подобия для ее спектрального тензора [4 – 7]. Следует особо отметить, что данный критерий является универсальным, так как не зависит от наклона уровня и наклона дна и определяется только глубиной места, вертикальной координатой, вязкостью, параметром Кориолиса, а также частотой. Поэтому, например, такие труднейшие проблемы геофизической гидродинамики, как задание граничных условий, учет многофакторности, разномасштабности и другие

сравнительно легко разрешаются в рамках данного подхода, поскольку при этом, например, не конкретизируются традиционные граничные условия на поверхности моря, а также не только количество воздействующих факторов, но и их значения, что позволяет, пожалуй, впервые учесть таким образом и неизвестные факторы (которые также могут в существенной степени определять исследуемую природу скорости течений). Так как в данном случае и сами длинноволновые возмущения уровня являются такими факторами, то, разумеется, при этом не накладывается никаких ограничений на их количество.

Следовательно, на практике длинноволновая структура скорости течений и ее градиентное происхождение, в принципе, сравнительно легко могут быть установлены, например, на шельфе и материковом склоне по ее измерению только в одной точке (т. е. на отдельном горизонте), если при этом имеет место соответствие эмпирического и теоретического критерии подобия для ее спектрального тензора. В этом случае эмпирический спектральный тензор скорости течений полностью определяется суперпозицией длинноволновых возмущений уровня [7].

Поэтому одной из первоочередных задач, возникающих при спектральном анализе скорости течений, является, на наш взгляд, определение достоверных оценок ее колебаний, что в некоторых случаях (как, например, в рассмотренном выше случае) позволяет установить их генезис уже на его предварительной стадии. При этом предполагается, что данный вектор вращается по эллиптической орбите. Такой характер его поведения в терминах метода вращательных компонентов, как уже указывалось выше, можно представить с помощью комплексной функции, т.е. в виде суперпозиции двух формальных составляющих – разнонаправлено вращающихся по круговым орбитам двух векторов (т.е. круговых колебаний с правой и левой поляризацией), имеющих, вообще говоря, разные фазы и длины. Однако при этом реальную физическую ситуацию может описывать только результирующий вектор, например, в случае циклического изменения скорости течений в ряде частотных диапазонов, обусловленного астрофизическими факторами, а не поляризационными свойствами частиц во-

ды. Колебания скорости морских течений происходят в основном в горизонтальной плоскости, т.е. в плоскости их распространения, поэтому эти колебания следует рассматривать как продольные [1]. Необходимо также отметить, что к данной модели вектора скорости течений относятся и предельные случаи, когда он совершает реверсивное движение или круговое вращение (соответственно линейную и круговую поляризации).

Данный подход, как известно, используется и при построении полуспектральных гидродинамических моделей (когда решение задачи находится непосредственно в частотной области), необходимых для интерпретации результатов спектрального анализа в терминах геофизической гидродинамики.

Однако возможности описанной выше физической модели вектора скорости течений, несмотря на простоту его формализации, строго говоря, до сих пор полностью не раскрыты в физической океанографии, если не принимать во внимание не совсем корректную, на что впервые справедливо указали авторы векторно-алгебраического метода [1], абсолютизацию ее отдельных моментов в силу априорного, по их мнению, предположения о физике его поведения.

В то же время с помощью, пожалуй, самого совершенного на сегодня с точки зрения предоставления наиболее полной информации о векторе скорости течений в виде инвариантов его корреляционного и спектрального тензоров векторно-алгебраического метода [1], как это ни парадоксально, к сожалению, практически невозможно доказать даже его чисто колебательный характер, так как эти инварианты описывают его кинематику, по утверждению авторов этого метода, безотносительно к его физической природе. В этом, как они полагают, и заключается универсальность их метода.

Авторы векторно-алгебраического метода (как оказалось впоследствии, ошибочно), в отличие от других подходов, предполагали, что при спектральном анализе вектора скорости течений следует отказаться от априорного задания его формализации (т.е. его математической модели), представив его просто как евклидов вектор. Следствием априорной формализации поведения

исследуемого вектора является, по их мнению, абсолютизация его физической природы, что оказывается при интерпретации каждого из выявленных таким образом пиков его спектральных характеристик. Только такой подход, по мнению этих авторов, позволяет получить результаты анализа, свободные от субъективизма и иллюзорности исследователя. Однако при этом, к сожалению, большей частью по вине самих этих авторов, вне рассмотрения, как и следовало ожидать, осталась даже сама проблема конкретизации параметров эллипса вращения вектора скорости течений с помощью соответствующих инвариантов его спектрального тензора, поскольку именно это должно явиться обязательным результатом данного спектрального анализа. Они ошибочно предполагали, что, представив вектор скорости течений как евклидов вектор, они таким образом с помощью корреляционных функций смогут рассчитать характеристики спектрального тензора безотносительно к его физической природе. Эти авторы, на наш взгляд, не заметили, что в данном случае результат спектрального анализа определяется не столько формализацией исследуемого вектора и применяемым при этом конкретным методом, сколько в основном особенностями преобразования Фурье как такового. Именно вследствие их субъективизма, а также недооценки основных возможностей последнего и произошло, по-видимому, отрицание какой-либо физики поведения вектора скорости течений в полученном ими результате. Как будет показано далее, в данном случае структура скорости течений должна определяться параметрами, общими как для характеристического эллипса симметричной части ее спектрального тензора, так и для его (данного тензора) так называемого индикатора вращения. При этом, как нетрудно догадаться, данные параметры соответствуют эллиптической поляризации вектора скорости течений, т.е. чисто колебательному характеру его поведения.

Поскольку векторно-алгебраический метод появился как альтернатива методу вращательных компонентов, то у ряда сторонников последнего метода возникли вполне обоснованные сомнения относительно его использования.

С другой стороны, некоторые не совсем физически обоснованные положения век-

торно-алгебраического метода, а также слишком общий характер и поэтому трудно интерпретируемый с физической точки зрения результат спектрального анализа явились, на наш взгляд, причиной того, что он до сих пор не получил широкого применения. Поэтому для разрешения невыясненных на сегодня отдельных моментов, возникающих при применении этих двух методов, целесообразно критически рассмотреть их основные положения более детально.

В векторно-алгебраическом методе спектральная плотность (тензор-функция, далее просто тензор) вектора скорости течений  $\mathbf{S}$  является преобразованием Фурье корреляционного тензора и может быть представлена в матричной форме в виде суммы симметричной и кососимметричной ее частей в следующем виде [1]:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{uu}, & S_{uv} \\ S_{vu}, & S_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{uu}, & C_{uv} \\ C_{uv}, & S_{vv} \end{pmatrix} - iQ_{uv} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0 \\ 0, & \lambda_2 \end{pmatrix} + 0,5\mathbf{D} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $S_{uu}$ ,  $S_{vv}$  – автоспектры ортогональных составляющих скорости течений  $u$  и  $v$ ,  $S_{uv} = C_{uv} - iQ_{uv}$ ,  $S_{vu} = C_{uv} + iQ_{uv}$ ,  $C_{uv}$ ,  $Q_{uv}$  – косспектр и квадратурный спектр соответственно:

$$\begin{aligned} S_{uu} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_{uu}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad S_{uv} = C_{uv} - iQ_{uv}, \\ S_{vu} &= C_{vu} - iQ_{vu}, \quad S_{vv} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_{vv}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \\ C_{uv} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [K_{uv}(\tau) + K_{uv}(-\tau)] \cos(\omega\tau) d\tau, \\ Q_{uv} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [K_{uv}(\tau) - K_{uv}(-\tau)] \sin(\omega\tau) d\tau. \end{aligned}$$

$C_{vu} = C_{uv}$ ,  $Q_{vu} = -Q_{uv}$ ,  $K_{uu}$ ,  $K_{uv}$ ,  $K_{vu}$ ,  $K_{vv}$  – элементы корреляционного тензора,  $\tau$  – временной сдвиг,  $\omega$  – угловая частота,  $\lambda_{1,2} = |\lambda_{1,2}|$  – собственные значения симметричной части спектрального тензора  $\mathbf{S}$ ,  $\lambda_{1,2}$  – ее главные оси, а  $\mathbf{D}$  – функция, имеющая смысл индикатора вращения:

$$\mathbf{D} = S_{uv} - S_{vu} = -2iQ_{uv} = iD. \quad (2)$$

Собственные числа  $\lambda_{1,2}$  любого тензора второго ранга определяются как корни характеристического уравнения матрицы его симметричной части [1]:

$$\lambda_{1,2} = 0,5[I_1 \pm (I_1^2 - 4I_2)^{1/2}], \quad (3)$$

где  $I_1$  – линейный, а  $I_2$  – квадратичный инварианты симметричной части спектрального тензора  $\mathbf{S}$ :

$$I_1 = S_{uu} + S_{vv} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (4)$$

реть их основные положения более детально.

В векторно-алгебраическом методе спектральная плотность (тензор-функция, далее просто тензор) вектора скорости течений  $\mathbf{S}$  является преобразованием Фурье корреляционного тензора и может быть представлена в матричной форме в виде суммы симметричной и кососимметричной ее частей в следующем виде [1]:

$$I_2 = S_{uu}S_{vv} - C_{uv}^2 = \lambda_1\lambda_2.$$

Линейный инвариант  $I_1$ , как скалярная величина, характеризует распределение модуля интенсивности изменений скорости течений в частотной области.

Заметим, что в отличие от инварианта  $I_1$  индикатор вращения  $\mathbf{D}$  характеризует распределение ортогональных составляющих изменений скорости течений в частотной области. При этом  $|\mathbf{D}|$  описывает модуль этих изменений, знак – направление вращения, а символ  $i$  – фазовый сдвиг относительно инварианта  $I_1$ , равный  $\pi/2$ . Можно показать, что  $I_1 \geq |\mathbf{D}|$  [1].

Квадратичный инвариант  $I_2$ , как следует из (4), совпадает с детерминантом матрицы симметричной части спектрального тензора  $\mathbf{S}$  и поэтому является индикатором формы тензорной кривой, соответствующей данной матрице. Этому тензору будет соответствовать только характеристический эллипс (окружность или отрезок прямой, но не гипербола) [1], характерные размеры (полусоси) которого  $\lambda_1^{1/2}$  и  $\lambda_2^{1/2}$  определяются с помощью выражения (3). Собственные числа  $\lambda_1 = |\lambda_1|$  и  $\lambda_2 = |\lambda_2|$  суть характеристические числа данной квадратичной формы. Так как они являются экстремальными значениями спектральных плотностей проекций скорости течений по новым ортогональным направлениям  $\lambda_{1,2}$ , то их выбирают таким образом, чтобы при этом главная ось  $\lambda_1$  и большая ось характеристического спектрального эллипса совпали с осью абсцисс в приведенной таким образом новой системе координат, ориентация которой затем определяется относительно исходной системы координат.

Из (3) и (4) следует выражение для собственных чисел  $\lambda_{1,2}$ :

$$\lambda_{1,2} = 0,5 \{S_{uu} + S_{vv} \pm [(S_{uu} - S_{vv})^2 + 4C_{uv}^2]^{1/2}\}. \quad (5)$$

В методе вращательных компонентов принято следующее представление вектора скорости течений  $W$  [2]:

$$W = 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} [W_n \exp(i\omega_n t) + W_{-n} \exp(-i\omega_n t)], \quad (6)$$

где  $W_{\pm n} = u_a \pm v_b + i(v_a \mp u_b)$  – комплексные коэффициенты Фурье вектора скорости  $W$ ,  $\omega_n$  – угловая частота,  $n$  – целые положительные числа ( $\omega_n > 0$ ),  $u_a$ ,  $u_b$ ,  $v_a$ ,  $v_b$  – коэффициенты Фурье ортогональных составляющих скорости течений  $u$  и  $v$ , а индексы  $a$  и  $b$  – соответственно косинус- и синус-разложение по временной координате  $t$  (в дальнейшем для упрощения записи вместо индексов  $\pm n$  будут использоваться только их знаки).

В левой системе координат (в нашем случае азимутальной, с осью  $Ox$ , направленной на север) составляющие вектора скорости течений  $W_{\pm}$  вращаются с угловыми частотами  $\omega_+$  ( $\omega_-$ ) в положительном (отрицательном) направлении, т.е. по (против) часовой стрелки относительно оси  $Ox$  соответственно. При этом они описывают эллипс, большая ось которого образует с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ , равный полусумме фазовых углов этих составляющих, а знак поляризации соответствует знаку большей по модулю его составляющей  $W_{\pm}$  [2].

На практике выражение (6) в силу дискретности наблюдений, а также ограниченности их количества аппроксимирует вектор  $W$  в виде конечной суммы членов его разложения по частоте, т.е. приближенно.

Заметим, что возможность такого однозначного представления вектора скорости течений в виде (6) в настоящее время не доказана ни теоретически, ни экспериментально, поскольку точность получения оценок его спектральных характеристик по данным наблюдений не позволяет сделать это [1]. По мнению авторов векторно-алгебраического метода, представление данного вектора в виде (6) с физической точки зрения является некорректным вследствие его комплекснозначности, а также

априорной конкретизации физики его поведения, что неизбежно приводит к субъективизму и иллюзорности полученных в результате анализа выводов.

Из анализа кинематики вектора скорости течений [2] следует, что

$$S_{uu} \sim A^2 + B^2 + 2AB\cos 2\alpha, \quad (7)$$

$$S_{vv} \sim A^2 + B^2 - 2AB\cos 2\alpha,$$

$$-Q_{uv} \sim A^2 - B^2,$$

где  $A = |W_+|$ ,  $B = |W_-|$ .

Заметим, что  $(A + B)$  и  $(A - B)$  – соответственно большая и малая полуоси поляризованного эллипса как результата вращения составляющих  $W_{\pm}$  вектора скорости течений.

Авторы векторно-алгебраического метода выполнили сравнительный анализ основных спектральных характеристик скорости течений, полученных с помощью данного метода и метода вращательных компонентов, а также сделали попытку аппроксимации основных инвариантов корреляционного и спектрального тензоров вектора скорости течений [1]. К сожалению, при этом они основное внимание уделили, на наш взгляд, не тому, что объединяет эти методы, а тому, что их разъединяет.

Следует отметить, что в сравниваемых методах вероятностные характеристики представлены в виде комбинаций авто- и взаимных спектральных плотностей проекций вектора скорости течений на декартовы оси. Вполне очевидно, что данные характеристики, полученные с помощью этих методов, правомерно сравнивать для одной и той же временной реализации вектора скорости течений или физики его поведения. К сожалению, не совсем ясно, с какой именно физической точки зрения эти авторы осуществляли данное сравнение.

Коротко остановимся на сопоставлении некоторых основных спектральных характеристик, получаемых с помощью данных методов.

Используя (7), найдем выражения для спектров правого  $S_+$  и левого  $S_-$  вращений составляющих  $A$  и  $B$  соответственно, а также разности спектров  $S_D$ , которые, оказывается, очень просто выражаются в терминах векторно-алгебраического метода:

$$S_{\parallel} = 0,125(S_{uu} + S_{vv} - 2Q_{uv}) = I_1 + D \sim A^2, \quad (8)$$

$$S_{\perp} = 0,125(S_{uu} + S_{vv} + 2Q_{uv}) = I_1 - D \sim B^2,$$

$$S_D = -0,5Q_{uv}.$$

Здесь и далее использование в одном выражении различных с физической точки зрения спектральных характеристик является, как и следовало ожидать, результатом комплекснозначного представления вектора скорости течений (6) и вытекающих из него операций, допустимых в алгебре комплексных чисел и поэтому не эквивалентных операциям над евклидовыми векторами [1]. Кроме того, из выражений (8) следует, что авторы векторно-алгебраического метода тем самым косвенно признают, по сути, соответствие между приведенными в (8) инвариантами, относящимся к этим двум анализируемым здесь методам (если не принимать во внимание то, что индикатор вращения здесь представлен в виде действительной, а не мнимой функции) [1].

Далее, выражение для инварианта  $D$  в (8) имеет следующий вид:

$$D = -2Q_{uv} = \Theta|\mathbf{D}|, \quad (9)$$

где  $\Theta = \text{sign}(A - B)$  – знак направленности вращения вектора скорости течений (см. (2)).

Следует заметить, что успешное сопоставление анализируемых спектральных методов фактически определяется выяснением той роли, которая отводится в этих методах инварианту  $Q_{uv}$ . Именно с помощью данного инварианта можно получить наиболее полную и объективную информацию о векторном процессе в виде его спектрального тензора. Данная проблема заслуживает более подробного рассмотрения, поскольку, на наш взгляд, она не получила должного разрешения в работе [1]. Это, на наш взгляд, и явилось причиной того, что авторы векторно-алгебраического метода не заметили взаимосвязь между индикатором вращения  $\mathbf{D}$  и остальными инвариантами спектрального тензора  $\mathbf{S}$  вектора скорости

течений, объясняющую физику его поведения.

По мнению авторов [1], кинематическая интерпретация инварианта  $S_D$  существенно обусловлена нечетким определением ее через “среднюю площадь эллиптических поверхностей” (как результат суперпозиции разнонаправленных вращений составляющих вектора скорости течений).

Поскольку спектральному характеристическому эллипсу скорости течений можно поставить в соответствие эллипс как результат вращения ее составляющих  $W_{\pm}$  (выраженный в терминах метода вращательных компонентов), то для собственных чисел  $\lambda_{1,2}$  первого из этих эллипсов будет справедливо следующее соотношение:

$$\lambda_{1,2} \sim (A \pm B)^2. \quad (10)$$

Тогда коэффициент сжатия  $K$  для этих двух эллипсов можно выразить через собственные числа  $\lambda_{1,2}$ :

$$K = (\lambda_2/\lambda_1)^{1/2}. \quad (11)$$

В свою очередь из совместного анализа соотношений (7), (10) и (11) следует, что

$$\mathbf{D} = 2i\Theta(\lambda_1\lambda_2)^{1/2} = 2i\Theta I_2^{1/2} = 2i\Theta K\lambda_1. \quad (12)$$

Кроме того, особого внимания заслуживает выражение для инварианта  $Q_{uv}$ , которое следует из выражений (2) и (12) для индикатора вращения  $\mathbf{D}$ :

$$Q_{uv} = -\Theta(\lambda_1\lambda_2)^{1/2} = -\Theta(S_{uu}S_{vv} - C_{uv}^2)^{1/2}. \quad (13)$$

Из анализа выражения (13) следует, в частности, что спектральный тензор  $\mathbf{S}$  можно найти, не прибегая при этом непосредственно к вычислению квадратурного спектра  $Q_{uv}$ . Заметим также, что с помощью данного инварианта можно очень просто проверить качество последующего спектрального анализа.

Итак, вместо (1) имеем следующее выражение для спектрального тензора  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \Theta(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \Theta(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}i \\ -\Theta(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}i & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что детерминант полной матрицы спектрального тензора  $S$ , приведенной к главным осям  $\lambda_{1,2}$  в (14), равен нулю. Учитывая, что  $I_1 \geq |\mathbf{D}|$ , данный тензор можно пронормировать (делением ее элементов) на  $I_1$ :

$$S = \begin{pmatrix} (1+K^2)^{-1}, & 0 \\ 0, & K^2(1+K^2)^{-1} \end{pmatrix} + \frac{\Theta Ki}{1+K^2} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Пронормированный таким образом спектральный тензор  $S$  вектора скорости течений является тензорным аналогом критерия подобия  $K_e$  спектрального характеристического эллипса данного вектора [6], поскольку содержит в себе, по сути, такие же его (эллипса) характеристики, что и  $K_e$ . Действительно, для данного эллипса (а также для эллипса вращения исследуемого вектора) можно ввести критерий подобия  $K_e$  как суперпозицию скалярного  $\Theta K$  и векторного  $E$  полей:

$$\mathbf{K}_e \Rightarrow \mathbf{K}_e(\Theta K, E), \quad E = \cos\alpha + i\sin\alpha. \quad (16)$$

$$|E|^2 = [(S_{uu} + S_{vv})^2 - 4(S_{uu}S_{vv} - C_{uv}^2)] / [(S_{uu} + S_{vv})^2 - 4Q_{uv}^2]. \quad (18)$$

После приведения выражений (17) и (18) к главным осям в соответствии с работой [1] получим вместо них следующие выражения:

$$C_R = -2Q_{uv}/(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (19)$$

$$|E|^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 / [(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4Q_{uv}^2]. \quad (20)$$

Наконец, если в выражения (19) и (20) подставить значение инварианта  $Q_{uv}$  (см. (2) и (12)), то в результате получим окончательные выражения для исследуемых параметров:

$$C_R = 2\Theta(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}/(\lambda_1 + \lambda_2), \quad |E|^2 = 1. \quad (21)$$

По мнению авторов [1], формула (17) не совсем верна, так как при чисто вращательном движении  $C_R = 1$ , а  $C_R = 0$  не является критерием однороденного движения, поскольку лишь указывает на отсутствие закономерного вращения в изменчивости исследуемого вектора. В качестве примера в [1] приведен случай изотропной турбулентности, когда  $C_R = \Theta|\mathbf{D}| = 0$ , а  $S_{uu} = S_{vv}$ .

Однако такой довод нельзя считать, на наш взгляд, обоснованным, поскольку равенство  $S_{uu} = S_{vv}$ , как это следует из (7), имеет место при  $\alpha = \pi/2$  и  $A = B$ , т.е. в случае

однонаправленного движения с данной его ориентацией.

Кроме рассмотренных выше с точки зрения основных положений векторно-алгебраического метода и метода вращательных компонентов основных спектральных характеристик, в [1] анализируются и другие. В качестве иллюстрации аналогично рассмотрим такие вероятностные характеристики метода вращательных компонентов [2], как коэффициент вращения  $C_R$  и стабильность (устойчивость) ориентации  $|E|^2$  поляризованного спектрального эллипса вращения вектора скорости течений:

$$C_R = -2Q_{uv}/(S_{uu} + S_{vv}), \quad (17)$$

однонаправленного движения с данной его ориентацией.

По утверждению авторов [1], инварианты  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  суть главные оси спектрального характеристического эллипса вектора скорости течений, а инвариант  $2iQ_{uv}$  не связан с этим эллипсом, т.е. параметр  $|E|^2$  не имеет ясной геометрической интерпретации. Между тем полученное нами выше тождество  $|E|^2 = 1$  (см. (21)) доказывает, что основой формализации поведения вектора скорости течения с помощью преобразования Фурье является его эллиптическая поляризация, которая в действительности может соответствовать его чисто колебательному характеру поведения.

Как показали наши предыдущие исследования по данной проблеме [7], соотношения (12) действительно выполняются для статистически значимых пиков в спектрах скорости течений, полученных с помощью векторно-алгебраического метода. До сих пор в аналогичных исследованиях других авторов на это обстоятельство не обращалось особого внимания вследствие как доверительного отношения к данному методу, так и неизбежных ошибок, допускаемых при оценивании спектральных характеристик скорости течений.

Авторы векторно-алгебраического метода вследствие абсолютизации его основных положений, на наш взгляд, просто проигнорировали тот очевидный факт, что главные оси  $\lambda_{1,2}$  симметричной части спектрального тензора вектора скорости течений совпадают со спектральными плотностями проекций данного вектора на оси соответствующего ему эллипса вращения. Поэтому с физической точки зрения интерпретация основных результатов, полученных с помощью данного метода, значительно облегчается, так как при этом формализация поведения вектора скорости течений в частотной области, по сути, соответствует в первую очередь чисто колебательному характеру его поведения.

Оценки спектральных характеристик временной реализации вектора скорости течений, полученной по данным наблюдений, с помощью соотношений (11) – (13) можно заметно улучшить уже на предварительном этапе анализа и тем самым проверить качество оценок авто- и взаимных спектров проекций исследуемого вектора на ортогональные оси координат.

Кроме того, достоверность обнаруживаемых при этом пиков в его спектре значительно повышается, если они приходятся на узловые точки оси частот. Игнорирование этого момента, особенно в низкочастотной области, на которую приходится значительная часть энергии, заметно снижает точность расчета спектральных характеристик данного вектора и тем самым создает только иллюзию различия физики его поведения от его чисто колебательного характера (поскольку его формализация при этом отличается от теоретической).

Как видим, формализация поведения вектора скорости течений в частотной области с помощью традиционного преобразования Фурье имеет универсальный характер. Поэтому данное обстоятельство значительно облегчает использование полуспектральных гидродинамических моделей при интерпретации результатов спектрального анализа его временной реализации.

На сегодня в рамках полуспектральной линейной модели морских течений нам удалось показать, что формальный характер чисто колебательного поведения вектора скорости течений в своей основе действительно может иметь четкую физическую природу, например, в случае длинноволно-

вой структуры динамики вод на шельфе и материковом склоне.

В данной работе с помощью векторно-алгебраического метода анализировались не только с формальной, но и физической точки зрения уникальные по продолжительности и особенностям проявления близинерционные (инерционные и приливные) колебания скорости течений с целью проверки возможности представления ее временной реализации в виде суперпозиции чисто колебательных процессов, проявляющихся на отдельных частотах, а также их возможной модуляции.

С этой целью были использованы данные наблюдений, выполненные в 1978 – 1979 гг. на стабилизированном буе Института океанологии АН СССР у Кавказского побережья Черного моря (у п. Геленджик) на горизонте 25 м (глубина 70 м) с помощью самописца течений типа БПВ (буквопечатывающая вертушка) с дискретностью наблюдений  $\Delta t = 1\text{ч}$ .

Расчет временных спектральных тензоров скорости течений для участков различной продолжительности данной реализации показал, что оптимальными с точки зрения соответствия определяющих их статистических параметров основным требованиям спектрального анализа и вместе с тем эмпирического тензорного критерия подобия для этих участков его теоретическому аналогу [7], характеризующему длинноволновую структуру скорости течений, являются 10 - суточные участки реализации, из которых предварительно были удалены низкочастотные гармоники с периодами  $T > 51\text{ ч}$ .

Поэтому для достижения поставленной выше цели для всей исследуемой временной реализации вектора скорости течений по перекрывающимся (со сдвигом по времени 2 сут) 10 – суточным ее участкам было рассчитано и проанализировано свыше 360 его временных (текущих) спектров. Однако особенно отчетливо длинноволновая структура поля скорости течений наблюдалась примерно с 23.08.78 г. по 04.12.79 г. При этом исследуемый процесс в целом был квазистационарным. Поэтому для него были рассчитаны также двухчастотные спектры, которые представлены на рисунке.

Расчет частотно-временных (текущих) спектров  $S_v(\omega, t)$  и двухчастотных спектров

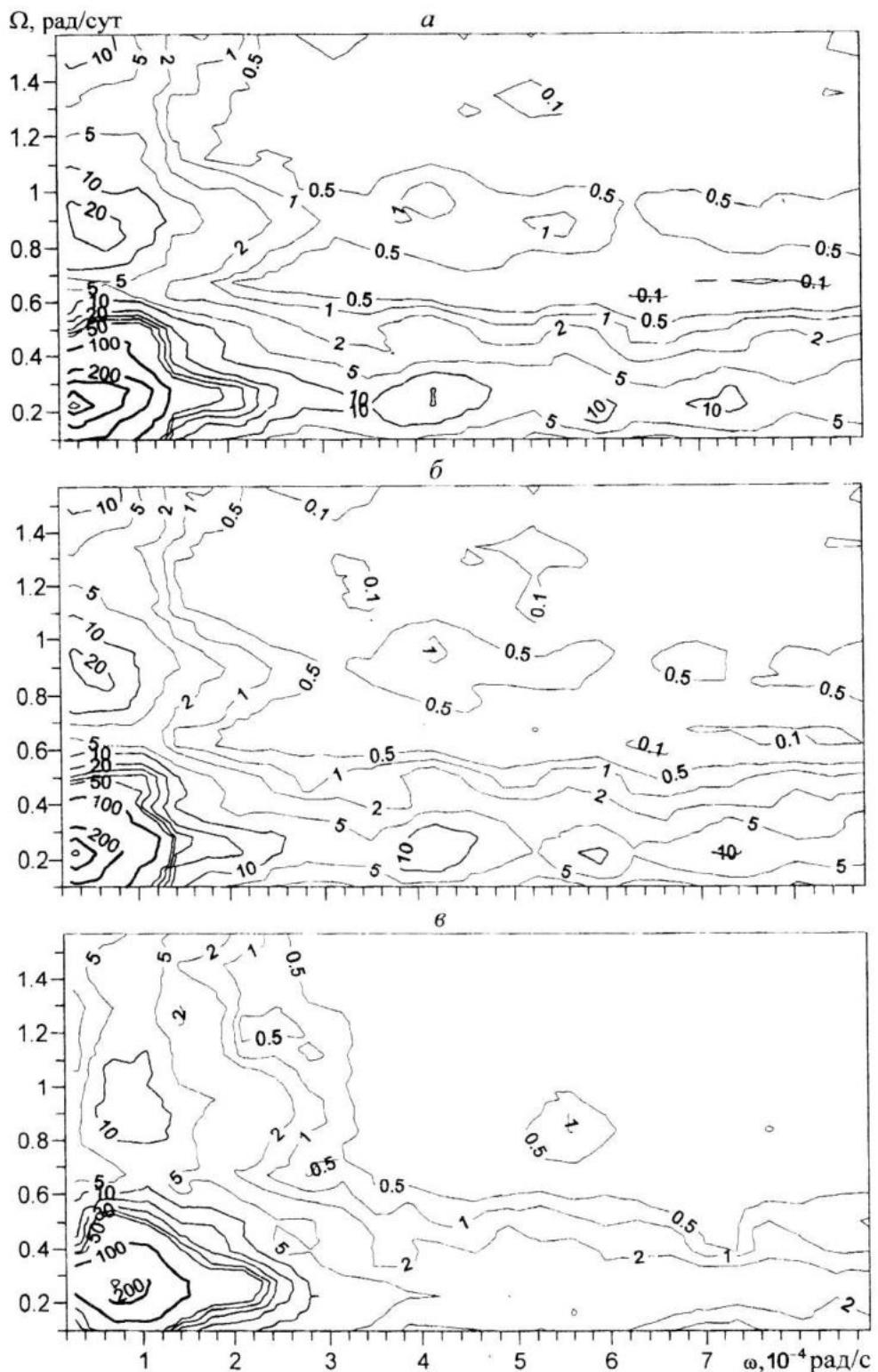


Рисунок – Биспектры линейного инварианта  $I_1$  (*a*) и собственных чисел  $\lambda_1$  (*б*) и  $\lambda_2$  (*в*) спектрального тензора скорости течений (в  $10^7 \text{ см}^4 \cdot \text{сум}/(\text{рад}^3 \cdot \text{с}^2)$ ) у Кавказского побережья Черного моря по данным наблюдений на стабилизированном буе ИОАН СССР у п. Геленджик (период 23.08.78 г. – 04.12.79 г., горизонт 25 м, глубина 70 м, дискретность наблюдений  $\Delta t = 1$  ч)

$S_v(\omega, \Omega)$  производился с помощью следующих формул [1]:

$$S_v(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_v(t, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad S_v(\omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_v(t, \tau) \exp[-i(\omega\tau + \Omega t)] dt d\tau, \quad (22)$$

где  $K_v$  – корреляционный тензор,  $\Omega$  – частота модуляции.

При этом из текущих спектров  $S_v(\omega, t)$  с помощью низкочастотной фильтрации предварительно были удалены гармоники с периодами более 56 сут.

Как следует из приведенного рисунка, колебания скорости в исследуемой близинерционной области частот изменяются циклически, что обусловлено их модуляцией за счет синоптических и более длинно-периодных колебаний (периоды ~7 и ~22 – 24 сут соответственно).

Модуляция колебаний скорости течений в близинерционной области частот за счет синоптических колебаний (периоды ~7 сут), как это следует из анализа значений собственных чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ее спектрального тензора, имеет явно анизотропный характер.

## Л и т е р а т у р а

1. Белишев А.П., Клеванцов Ю.П., Рожков В.А. Вероятностный анализ морских течений.– Л.: Гидрометеоиздат, 1983. – 263 с.
2. Gonella J.A. A rotary-component method for analyzing meteorological and oceanographic vector time series // Deep-Sea Res., 1972.– 19, №12. – Р. 833–846.
3. Хоролич Н.Г., Фомин В.В., Хоролич В.Н. О взаимосвязи инвариантов спектральных тензоров градиентной скорости ветровых течений при реверсивном изменении наклона уровня // Системы контроля окружающей среды / Сб. науч. тр. МГИ НАНУ. – Севастополь. 2006. – С. 258–267.
4. Хоролич Н.Г., Хоролич В.Н. О подобии спектральных тензоров скорости течений на шельфе Черного моря // Экологич. безопасность прибрежн. и шельф. зон и комплексн. использование ресурсов шельфа / Сб. науч. тр. МГИ НАНУ. – Севастополь: ЭКОСИ – Гидрофизика. 2007.– Вып. 15. – С. 260–279.
5. Хоролич Н.Г., Ломакин П.Д., Хоролич В.Н. Об использовании подобия спектральных тензоров колебаний скорости течений для обнаружения длинных волн на шельфе // Системы контроля окружающей среды / Сб. науч. тр. МГИ НАНУ. – Севастополь. 2007. – С. 240–248.
6. Хоролич Н.Г., Фомин В.В., Хоролич В.Н. О подобии спектральных тензоров градиентной скорости ветровых течений на шельфе // Морской гидрофизический журнал, 2008. – № 5. – С. 67–80.
7. Хоролич Н.Г., Белокопытов В.Н., Хоролич В.Н. О временной перемежаемости длинноволновых колебаний скорости течений на шельфе Черного моря // Системы контроля окружающей среды / Сб. науч. тр. МГИ НАНУ. – Севастополь. 2008. – С. 220–229.
8. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – Ч. 1. – 480 с. – Ч. 2. – 365 с.
9. Блатов А.С., Булгаков Н.П., Иванов В.А. и др. Изменчивость гидрофизических полей Черного моря.– Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 240 с.
10. Блатов А.С., Иванов В.А. Гидрология и гидродинамика шельфовой зоны Черного моря. – Киев: Наук. думка, 1992. – 241 с.

В то же время модуляция колебаний скорости течений в исследуемой области частот, обусловленная влиянием более длиннопериодных колебаний (периоды ~22 – 24 сут), в отличие от предыдущего случая имеет почти изотропный характер.

Обнаруженные модуляции, по-видимому, могут быть обусловлены как непосредственно баротропными волнами Россби и баротропными топографическими волнами, так и опосредовано – длинноволновой динамикой вод Основного черноморского течения. В результате анализа оценок баротропных волн Россби в Черном море, полученных по линейным дисперсионным соотношениям, установлено [8 – 10], что их временные характеристики заключены в интервале 18 ч – 20 сут, а пространственные – в интервале 50 – 200 км.